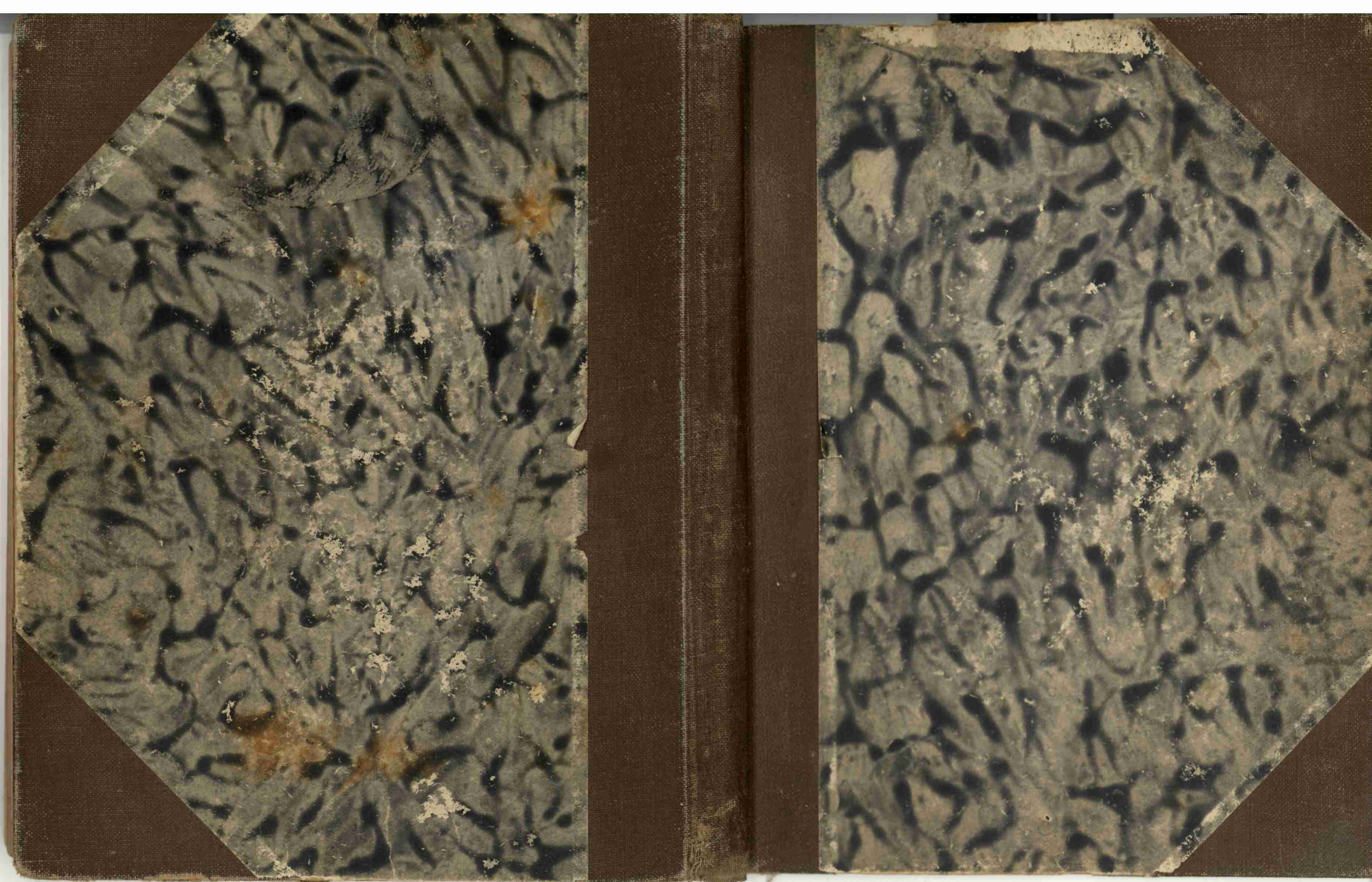




9. IX. 36

V. Imig Rose!

$$\frac{L}{L} = L$$
 $a =$ *i*

45

10

Dziśgowanie.

Potęga jest to iloczyn równych czynników.

$$\text{I. } (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\text{II. } a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\text{III. } (a^m)^n = a^{mn}$$

$$\text{IV. } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\text{V. } a^m : a^n = a^{m-n}; (m > n). \left| \frac{2^3}{2^2} = \frac{4 \cdot 2}{4} = 2 \right|$$

Liczby naturalne muszą spełniać dwa warunki: muszą być liczbami całkowitymi i bezwzględnymi (bez znaku + lub -).

Potęgi o wykładnikach nienaturalnych.

$$a^{+n} = a^n$$

Potęga o wykładniku dodatnim równa się potędze o wykładniku bezwzględnym.

Potęga o wykładniku 0 (zero) równa się

jedności.

$$a^n : a^n = a^0$$

$$a^0 = 1$$

$$a^n : a^n = 1$$

Lekcja 6.

11. IX. 36.

Poręga o wykładniku ujemnym.

$$a^{+3} = a^3 = \frac{a^4}{a} = \frac{a^{+4}}{a}$$

$$a^{+2} = a^2 = \frac{a^3}{a} = \frac{a^{+3}}{a}$$

$$a^{+1} = a^1 = \frac{a^2}{a} = \frac{a^{+2}}{a}$$

$$a^0 = \frac{a^1}{a} = \frac{a^1}{a} = 1$$

$$a^{-1} = \frac{a^0}{a} = \frac{1}{a} = \frac{1}{a^1}$$

$$a^{-2} = \frac{a^{-1}}{a} = \frac{1}{a^2}$$

$$a^{-3} = \frac{a^{-2}}{a} = \frac{1}{a^3}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\frac{2}{3} \text{ i } \frac{3}{2} \text{ - odwrotności.}$$

$$5 = \frac{5}{1} \text{ i } \frac{1}{5}$$

$$a \text{ i } \frac{1}{a}$$

Poręga o wykładniku ujemnym równa

nie odwrotności tej potęgi, lecz o wykładniku bezwzględnym.

Przykłady.

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$

$$0.5^{-4} = \frac{1}{0.5^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = \frac{16}{1} = 16$$

$$(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$$

$$(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$$

$$(+3)^{-3} = \frac{1}{(+3)^3} = \frac{1}{27}$$

$$\left(-2\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-2\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{25}{4}} = \frac{4}{25}$$

$$a^{-2}b = \frac{1}{a^2}b = \frac{b}{a^2}$$

$$a^{-3}b^{-1} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^1} = \frac{1}{a^3b}$$

$$x^{-1}y^2z^{-3} = \frac{1}{x} \cdot \frac{y^2}{1} \cdot \frac{1}{z^3} = \frac{y^2}{xz^3}$$

$$2a^{-3}b^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b} = \frac{2}{a^3b}$$

$$\frac{2a^{-1}}{3^{-1}b^{-2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{a}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{b^2}} = \frac{\frac{2}{a}}{\frac{1}{3b^2}} = \frac{6b^2}{a}$$

Lekcja VIII.

30. IX. 36.

$$2765 \cdot 348 = 2000 + 700 + 60 + 5 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 04 + 0 \cdot 008 \\ = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3}$$

Przez ciąg cyfry w liczbie rozumniemy ciąg: kładnik potęgowy liczby 10, która się do: rozumiewa przy tej cyfrze jako czynnik.

$$\overline{II}, \overline{II}, \overline{I}, 0, -\overline{I}, -\overline{II}, -\overline{III}, \dots \text{ciąg cyfry.}$$

Przez ciąg liczby rozumniemy ciąg tej cyfry znaczącej, której ciąg jest najmniejszy. $0 \cdot 00 \underline{2} 85$; 2 - jest tu ta cyfra znacząca.

Prz.

$$(a^{-\frac{2}{3}})^{1\frac{1}{2}} \cdot (a^2)^{\frac{1}{3}} = \\ = (a^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \cdot (a^2)^{\frac{1}{3}} = a^{-1} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{-1+\frac{1}{3}} = a^{-\frac{2}{3}} = \\ = \sqrt[3]{a}.$$

$$(x+y)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x+y) = (x+y)^{1-\frac{2}{3}} = (x+y)^{\frac{1}{3}} = \\ = \sqrt[3]{x+y}.$$

$$\sqrt[3]{\frac{x+y}{x+y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x+y}}{\sqrt[3]{x+y^2}} = \sqrt[3]{\frac{x+y}{x+y^2}}.$$

$$a^{-\frac{2}{3}} : a^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}.$$

Zadanie.

1. X. 36.

Wykonać obliczenia:

$$l) (x-y)^{\frac{1}{2}} \cdot (x-y)^{\frac{3}{2}} = (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

$$m) a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{a}.$$

$$n) a^{\frac{5}{6}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6} - \frac{2}{6}} = a^{\frac{3}{6}} = \sqrt[3]{a}.$$

$$o) a^{\frac{2}{3}} : a^{-\frac{1}{3}} = a.$$

$$p) x^{2n-\frac{2}{3}} \cdot a^{n-\frac{1}{3}} = x^{2n-\frac{2}{3}} \cdot (\sqrt[3]{a})^{2n-\frac{2}{3}} = (x\sqrt[3]{a})^{2n-\frac{2}{3}} = \\ = (x\sqrt[3]{a})^{\frac{4n^2-2}{2n}} = (x\sqrt[3]{a})^{\frac{12n^2-4n}{6n}} = \\ = (x\sqrt[3]{a})^{\frac{6n-2}{3}} = \sqrt[3]{(x\sqrt[3]{a})^{6n-2}} = \\ = \sqrt[3]{x^{6n-2}} \cdot \sqrt[3]{a^{6n-2}} = \sqrt[3]{x^{6n-2}} \cdot \sqrt[3]{a^{6n-2}}.$$

$$\sqrt[n]{a^2} = (\sqrt[n]{a})^{\frac{2}{n}} = a^{\frac{2}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^{-3}} = a^{-\frac{3}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^{-1}} = a^{-\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^{-2}} = a^{-\frac{2}{n}}$$

Stosowa

$$1. (a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m}$$

$$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m}$$

$$2. a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{m+p}{n}} = \sqrt[n]{a^{m+p}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^{m+p}}$$

$$3. (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m \cdot p}{n \cdot q}}$$

$$(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m}^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n \cdot q]{a^{m \cdot p}}$$

$$4. (\frac{a}{b})^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}}$$

jest takie, w którym
ciadunkiem potęgowym.
wzajemnych.
nie staramy się tak
by po obu stronach równ.
jednej potęgi o równych
liczby rozumujemy; równym
równ. zasadach (z wyjątkiem 0 i 1)
dają równe wykładniki potęgowe.

L. X. 36.

Porównując wykładniki potęgowe, otrzymujemy
równanie algebraiczne.

$$9^x = 3 \quad 8^x = 2 \quad 16^x = \frac{1}{4} \quad 100^x = 0.1$$

$$3^{2x} = 3 \quad 2^{3x} = 2 \quad 16^x = 4^{-1} \quad 100^x = \frac{1}{10}$$

$$2^x = 1 \quad 3^x = 1 \quad 4^{2x} = 4^{-1} \quad 100^x = 10^{-1}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad x = \frac{1}{3} \quad 2x = -1 \quad 10^{2x} = 10^{-1}$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad 2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$8^x = \frac{1}{4} \quad 27^x = \frac{1}{9} \quad 5^{3-3x} = 0.04$$

$$8^x = 4^{-1} \quad 27^x = 9^{-1} \quad 5^{3-3x} = \frac{1}{25}$$

$$2^{3x} = 2^{-2} \quad 3^{3x} = 3^{-2} \quad 5^{3-3x} = 25^{-1}$$

$$3x = -2 \quad 3x = -2 \quad 5^{3-3x} = 5^{-2}$$

$$x = -\frac{2}{3} \quad x = -\frac{2}{3}$$

$$3-3x = -2$$

$$-3x = -5$$

$$x = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

$$\sqrt[3+x]{9} = \sqrt[2+x]{3}$$

$$9^{\frac{1}{3+x}} = 3^{\frac{1}{2+x}}$$

$$3^{\frac{2}{3+x}} = 3^{\frac{1}{2+x}}$$

$$\frac{2}{3+x} = \frac{1}{2+x}$$

$$4+2x = 3+x$$

$$x = -1$$

Równania wykładnicze.

Ze względu na to czym jest niewiadoma w rów-
naniu, dzielimy równania na: $\neq$

- 1) równania algebraiczne, t. zn. takie, w których niewiadoma jest zasadą potęgową;
- 2) równania przestępne, w których niewia-
doma nie jest zasadą potęgową; (tęma:
równania wykładnicze i logarytmowe).

Równanie wykładnicze jest takie, w którym
niewiadoma jest wykładnikiem potęgowym.
Należy do równań przestępnych.

Równanie wykładnicze staramy się tak
przekształcić, aby po obu stronach równ.
otrzymać po jednej potęgę o równych
zasadach. Wtedy otrzymujemy; równym
potęgom o równ. zasadach (z wyjątkiem 0 i 1)
odpowiadają równe wykładniki potęgowe.

Porównując wykładniki potęgowe, otrzymujemy
równanie algebraiczne.

$$9^x = 3 \quad 8^x = 2 \quad 16^x = \frac{1}{4} \quad 100^x = 0.1$$

$$3^{2x} = 3 \quad 2^{3x} = 2 \quad 16^x = 4^{-1} \quad 100^x = \frac{1}{10}$$

$$2^x = 1 \quad 3^x = 1 \quad 4^{2x} = 4^{-1} \quad 100^x = 10^{-1}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad x = \frac{1}{3} \quad 2^x = -1 \quad 10^{2x} = 10^{-1}$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad 2^x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$8^x = \frac{1}{4} \quad 2^{4x} = \frac{1}{9} \quad 5^{3-3x} = 0.04$$

$$8^x = 4^{-1} \quad 2^{4x} = 9^{-1} \quad 5^{3-3x} = \frac{1}{25}$$

$$2^{3x} = 2^{-2} \quad 3^{3x} = 3^{-2} \quad 5^{3-3x} = 25^{-1}$$

$$3^x = -2 \quad 3^x = -2 \quad 5^{3-3x} = 5^{-2}$$

$$x = -\frac{2}{3} \quad x = -\frac{2}{3} \quad 3-3x = -2$$

$$-3x = -5$$

$$x = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

$$\sqrt[3+x]{9} = \sqrt[2+x]{3}$$

$$9^{\frac{1}{3+x}} = 3^{\frac{1}{2+x}}$$

$$3^{\frac{2}{3+x}} = 3^{\frac{1}{2+x}}$$

$$\frac{2}{3+x} = \frac{1}{2+x}$$

$$4+2x = 3+x$$

$$x = -1$$

Zadanie.

2. $\bar{x}$. 36.

$$9^x = 27$$

$$3^{2x} = 3^3$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$4^x = 8$$

$$2^{2x} = 2^3$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$8^{5x-1} = 4$$

$$2^{15x-3} = 2^2$$

$$15x-3 = 2$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$4^{x-1} = \frac{1}{2}$$

$$4^{x-1} = 2^{-1}$$

$$2^{2x-2} = 2^{-1}$$

$$2x-2 = -1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[x-1]{8} = \sqrt[x-2]{4}$$

$$8^{\frac{1}{x-1}} = 4^{\frac{1}{x-2}}$$

$$2^{\frac{3}{x-1}} = 2^{\frac{2}{x-2}}$$

$$\frac{3}{x-1} = \frac{2}{x-2}$$

$$3x-6 = 2x-2$$

$$x = 4$$

$$\sqrt[2-x]{2^{x+2}} = \frac{1}{8}$$

$$2^{\frac{x+2}{2-x}} = 8^{-1}$$

$$2^{\frac{x+2}{2-x}} = 2^{-3}$$

$$\frac{x+2}{2-x} = -\frac{3}{1}$$

$$x+2 = -6+3x$$

$$-2x = -8$$

$$x = 4$$

$$\sqrt[x+4]{9^{x+1}} = \frac{1}{3}$$

$$9^{\frac{x+1}{x+4}} = \frac{1}{3}$$

$$3^{\frac{2x+2}{x+4}} = 3^{-1}$$

$$\frac{2x+2}{x+4} = -\frac{1}{1}$$

$$2x+2 = -x-4$$

$$x = -2$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-3} = \frac{4}{25}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$x-3 = 2$$

$$x = +5$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} = \frac{4}{3}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} = \frac{1}{\frac{3}{4}}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$$

$$x-1 = -1$$

$$x = 0$$

Lekcja $\bar{x}$.

3. $\bar{x}$. 36.

$$2^{x+2} \cdot 6^x = 3 \cdot 4^{x+1}$$

$$2^{x+2} \cdot 2^x \cdot 3^x = 3 \cdot 2^{2x+2}$$

$$2^{2x+2} \cdot 3^x = 3 \cdot 2^{2x+2}$$

$$3^x = 3$$

$$x = 1$$

$$2 \cdot 6^{x-2} = 3 \cdot 2^{x-1}$$

$$2 \cdot 2^{x-2} \cdot 3^{x-2} = 3 \cdot 2^{x-1}$$

$$2^{x-2+1} \cdot 3^{x-2} = 3 \cdot 2^{x-1}$$

$$3^{x-2} = 3$$

$$x-2 = 1$$

$$x = 3$$

$$3^{x+1} = 7^{x+1}$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x+1} = 1$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{7}\right)^0$$

$$x+1 = 0$$

$$x = -1$$

$$2^{3x-6} = 5^{x-2}$$

$$2^{3(x-2)} = 5^{x-2}$$

$$8^{x-2} = 5^{x-2}$$

$$\left(\frac{8}{5}\right)^{x-2} = \left(\frac{8}{5}\right)^0$$

$$x-2 = 0$$

$$x = 2$$

$$5 \cdot 2^{x+1} - 3 \cdot 2^x = 28$$

$$5 \cdot 2 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x = 28$$

$$10 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x = 28$$

$$7 \cdot 2^x = 28$$

$$2^x = 2^2$$

$$x = 2$$

Zadanie.

2. X. 36.

$$9^x = 27$$

$$3^{2x} = 3^3$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$4^x = 8$$

$$2^{2x} = 2^3$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$8^{5x-1} = 4$$

$$2^{15x-3} = 2^2$$

$$15x-3 = 2$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$4^{x-1} = \frac{1}{2}$$

$$4^{x-1} = 2^{-1}$$

$$2^{2x-2} = 2^{-1}$$

$$2x-2 = -1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{4}$$

$$8^{\frac{1}{x-1}} = 4^{\frac{1}{x-2}}$$

$$2^{\frac{3}{x-1}} = 2^{\frac{2}{x-2}}$$

$$\frac{3}{x-1} = \frac{2}{x-2}$$

$$3x-6 = 2x-2$$

$$x = 4$$

$$\sqrt[2-x]{2^{x+2}} = \frac{1}{8}$$

$$2^{\frac{x+2}{2-x}} = 8^{-1}$$

$$2^{\frac{x+2}{2-x}} = 2^{-3}$$

$$\frac{x+2}{2-x} = -\frac{3}{1}$$

$$x+2 = -6+3x$$

$$-2x = -8$$

$$x = 4$$

$$\sqrt[3]{9^{x+1}} = \frac{1}{3}$$

$$9^{\frac{x+1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$3^{\frac{2x+2}{3}} = 3^{-1}$$

$$\frac{2x+2}{3} = -\frac{1}{1}$$

$$2x+2 = -x-4$$

$$x = -2$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-3} = \frac{4}{25}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$x-3 = 2$$

$$x = +5$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} = \frac{4}{3}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} = \frac{1}{\frac{3}{4}}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$$

$$x-1 = -1$$

$$x = 0$$

Lekcja X.

3. X. 36

$$2^{x+2} \cdot 6^x = 3 \cdot 4^{x+1}$$

$$2^{x+2} \cdot 2^x \cdot 3^x = 3 \cdot 2^{2x+2}$$

$$2^{2x+2} \cdot 3^x = 3 \cdot 2^{2x+2}$$

$$3^x = 3$$

$$x = 1$$

$$2 \cdot 6^{x-2} = 3 \cdot 2^{x-1}$$

$$2 \cdot 2^{x-2} \cdot 3^{x-2} = 3 \cdot 2^{x-1}$$

$$2^{x-2+1} \cdot 3^{x-2} = 3 \cdot 2^{x-1}$$

$$3^{x-2} = 3$$

$$x-2 = 1$$

$$x = 3$$

$$3^{x+1} = 7^{x+1}$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x+1} = 1$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{7}\right)^0$$

$$x+1 = 0$$

$$x = -1$$

$$2^{3x-6} = 5^{x-2}$$

$$2^{3(x-2)} = 5^{x-2}$$

$$8^{x-2} = 5^{x-2}$$

$$\left(\frac{8}{5}\right)^{x-2} = \left(\frac{8}{5}\right)^0$$

$$x-2 = 0$$

$$x = 2$$

$$5 \cdot 2^{x+1} - 3 \cdot 2^x = 28$$

$$5 \cdot 2 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x = 28$$

$$10 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x = 28$$

$$7 \cdot 2^x = 28$$

$$2^x = 2^2$$

$$x = 2$$

Zadanie.

6. $\bar{x}$. 36.

Lekcja 11.

7. $\bar{x}$. 36.

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{10^{x-1}}{2} &= 2 \cdot 5^{x-1} \\ 10^{x-1} &= 4 \cdot 5^{x-1} \\ 5^{x-1} \cdot 2^{x-1} &= 4 \cdot 5^{x-1} \\ 2^{x-1} &= 2^2 \\ x-1 &= 2 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{x-3} &= 1 \\ \left(\frac{3}{4}\right)^{x-3} &= \left(\frac{3}{4}\right)^0 \\ x-3 &= 0 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \frac{3 \cdot 4^{x-1}}{8} &= 6^{x-2} \\ 3 \cdot 4^{x-1} &= 8 \cdot 6^{x-2} \\ 3 \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x-3} &= 2^3 \cdot 2^{x-2} \cdot 3^{x-2} \\ 3 \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x-3} &= 2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \\ 3 \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x-3} &= 2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \\ 3 \cdot 2^{x-3} &= 3 \cdot 3^{x-3} \\ 2^{x-3} &= 3^{x-3} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} &= \left(\frac{2}{3}\right)^0 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad 2 \cdot 3^{2x-5} + 3^{2x-3} &= 33 \\ 2 \cdot 3^{2x-3} \cdot 3^{-2} + 3^{2x-3} &= 33 \\ \frac{2}{9} \cdot 3^{2x-3} + 3^{2x-3} &= 33 \\ \frac{11}{9} \cdot 3^{2x-3} &= 33 \\ 11 \cdot 3^{2x-3} &= 297 \\ 3^{2x-3} &= 27 \\ 3^{2x-3} &= 3^3 \\ 2x-3 &= 3 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad 3 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x+2} &= 135 \cdot 2^x \\ 3 \cdot 3^x + 12 \cdot 3^x + 45 \cdot 3^x &= 135 \cdot 2^x \\ 60 \cdot 3^x &= 135 \cdot 2^x \\ \frac{3^x}{2^x} &= \frac{135}{60} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x &= \frac{9}{4} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 4^x - 3^{x-2} &= 5 \cdot 3^{x-1} + 4^{x-3} \\ 4^x - 4^{x-3} &= 5 \cdot 3^{x-1} + 3^{x-2} \\ 4^x - \frac{4^x}{64} &= 5 \cdot \frac{3^x}{3} + \frac{3^x}{9} \\ 576 \cdot 4^x - 9 \cdot 4^x &= 960 \cdot 3^x + 64 \cdot 3^x \\ 567 \cdot 4^x &= 1024 \cdot 3^x \\ \left(\frac{4}{3}\right)^x &= \frac{1024}{567}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 4^x - 3^{x-2} &= 5 \cdot 3^{x-1} + 4^{x-3} \\ 4^x - 4^{x-3} &= 5 \cdot 3^{x-1} + 3^{x-2} \\ 4^x - \frac{4^x}{4} &= \frac{5 \cdot 3^x}{3} + \frac{3^x}{9}. \end{aligned}$$

$$36 \cdot 4^x - 9 \cdot 4^x = 60 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^x$$

$$27 \cdot 4^x = 64 \cdot 3^x$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{64}{27}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

$$x = 3$$

Funkcja wykładnicza.

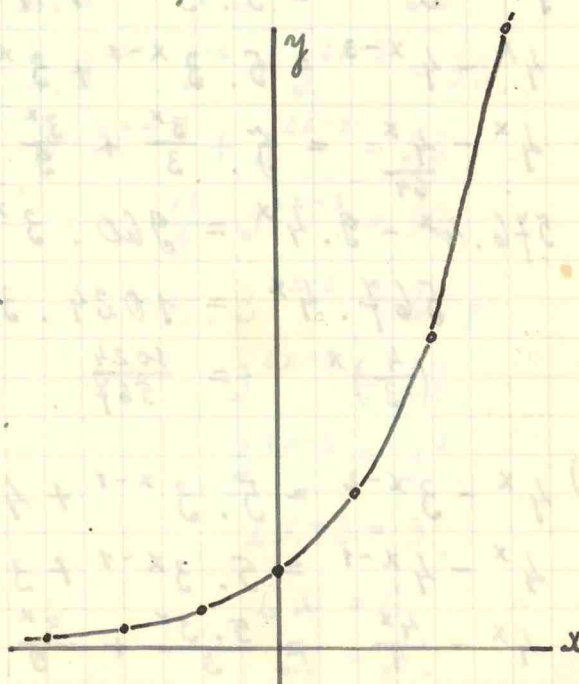
$y = a^x$ (Funkcja przeciwna; a - liczba stała, x - zmienna niezależna, a y - zmienna zależna (funkcja).
Wykluczamy wartości ujemne a , oraz dalsze
0 i 1.

$$a > 1$$

$$y = 2^x$$

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...

$\overbrace{1}^1 = \text{jednostka w wykresie.}$



Lekcja 16.

9. X. 26.

Logarytmowanie.

$$1) 2 + 3 = 5$$

$$5 = 2 + 3 \text{ dodawanie.}$$

$$2 = 5 - 3$$

$$3 = 5 - 2$$

} odejmowanie.

$$a + b - b = a$$

Odejmowanie jest do dodawania działaniem przeciwnym.

$$2) 2 \cdot 3 = 6$$

$$6 = 2 \cdot 3 \text{ mnożenie.}$$

$$2 = 6 : 3$$

$$3 = 6 : 2$$

} dzielenie.

$$3) 2^3 = 8$$

$$8 = 2^3 \text{ potęgowanie.}$$

$$2 = \sqrt[3]{8} \text{ pierwiastkowanie.}$$

$$3 = \log_2 8 \text{ logarytmowanie.}$$

Odejmowanie jest do dodawania działaniem odwrotnym i. zn., że oba te działania wynikają z tego samego związku, tylko dodawania używamy gdy nie wiadomo jest suma, a o: dejmowania, gdy nie wiadomo jest jeden z składników.

$$\frac{a \cdot b}{b} = a$$

Potęgowanie ma dwa działania od: wrotne: pierwiastkowanie i logarytmowanie.

$\sqrt[n]{a^n} = a$. Pierwiastkowanie jest działaniem przeciw-
nym (prószgowania), a logarytmowanie nie.

$$a^n = b$$

$$n = \log_a b$$

b - liczba logarytmowana.

a - zasada logarytmowa.

Logarytm pewnej liczby o pewnej zasadzie jest to wykładnik, do którego należy podnieść zasadę logarytmową, aby otrzymać liczbę logarytmowaną.

$$\log_3 9 = 2; \text{ bo } 3^2 = 9.$$

$$\log_2 32 = 5; \text{ bo } 2^5 = 32.$$

$$\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 \frac{1}{2^2} = \log_2 2^{-2} = -2.$$

$$\log_5 \frac{1}{25} = \log_5 \frac{1}{5^2} = \log_5 5^{-2} = -2.$$

Zadanie.

9. X. 36.

$$\log_4 4 = 1; \text{ bo } 4^1 = 4.$$

$$\log_3 81 = 4; \text{ bo } 3^4 = 81.$$

$$\log_{10} 100 = 2; \text{ bo } 10^2 = 100.$$

$$\log_4 64 = 3; \text{ bo } 4^3 = 64.$$

$$\log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = 3^{-1} - 1; \text{ bo } 3^{-1} = \frac{1}{3}.$$

$$\log_{10} 0.1 = \log_{10} \frac{1}{10} = \log_{10} 10^{-1} = -1; \text{ bo } 10^{-1} = 0.1.$$

$$\log_{10} 0.01 = \log_{10} \frac{1}{10^2} = \log_{10} 10^{-2} = -2; \text{ bo } 10^{-2} = 0.01.$$

$$\log_{100} 0.01 = \log_{100} \frac{1}{100} = \log_{100} 100^{-1} = -1; \text{ bo } 100^{-1} = 0.01.$$

$$\log_3 1 = 0; \text{ bo } 3^0 = 1.$$

Lekcja 13.

10. X. 36.

$$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}; \text{ bo } 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5.$$

$$\log_8 2 = \log_8 \sqrt[3]{8} = \log_8 8^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}; \text{ bo } 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

$$\log_{27} 3 = \log_{27} \sqrt[3]{27} = \log_{27} 27^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}; \text{ bo } 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

$$\log_{10} \sqrt[3]{100} = \log_{10} \sqrt[3]{10^2} = \log_{10} 10^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}; \text{ bo } 10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{100}.$$

$$\log_{100} 10 = \log_{100} \sqrt{100} = \log_{100} 100^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}; \text{ bo } 100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10.$$

$\log_{-2} 8 =$ nie istnieje; zasada logarytm. nie moze być ujem.
 $\log_0 8 =$ " " ; " " " " zerem.
 $\log_1 8 =$ " " ; " " " " jednostk.

Zasada logarytmowa musi być wzięta od jednego.

$$\log_{-1} -8 = n. e.$$

Liczba logarytmowana nie może być ujemna.

Prawa logarytmowania:

$$a^n = N \quad \left| \quad n = \log_a N.$$

$$a^p = P \quad \left| \quad p = \log_a P.$$

$$a^{n+p} = N \cdot P \quad \left| \quad \log_a(N \cdot P) = n + p.$$

$$\underline{\log_a(N \cdot P) = \log_a N + \log_a P. \quad (I.)}$$

Logarytm iloczynu równa się sumie logarytmów poszczególnych czynników.

Suma logarytmów powstaje z logarytmowania iloczynu.

$$a^{n-p} = \frac{N}{P} \quad \left| \quad \log_a\left(\frac{N}{P}\right) = n - p.$$

$$\underline{\log_a\left(\frac{N}{P}\right) = \log_a N - \log_a P. \quad (II.)}$$

Logarytm mianownika równa się różnicy logarytmów licznika i mianownika.

Różnica logarytmów powstaje z logarytmowania mianownika.

Lekcja 14.

14. X. 36.

$$a^n = N \quad \left| \quad n = \log_a N.$$

$$a^{np} = N^p \quad \left| \quad \log_a N^p = np.$$

$$\underline{\log_a(N^p) = p(\log_a N). \quad (III.)}$$

Logarytm potęgi równa się iloczynowi wykładnika potęgowego i logarytmu zasady.

Iloczyn pierwszej liczby i logarytmu pierwszej drugiej liczby powstaje z logarytmowania potęgi.

$$\sqrt[p]{a^n} = a^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{N} \quad \left| \quad \log_a(\sqrt[p]{N}) = \frac{n}{p}.$$

$$\underline{\log_a(\sqrt[p]{N}) = \frac{\log_a N}{p}. \quad (IV.)}$$

Logarytm pierwiastka równa się ilorazowi logarytmu liczby pierwiastkowanej przez wykładnik pierwiastkowy.

Własności

Logarytm pierwszej liczby przez pierwszą, drugą liczbę powstaje z logarytmowania pierwiastka.

Sumy i różnice logarytmować nie można.

W praktyce używamy logarytmów o podstawie 10. Takie logarytmy nazywają się logat. dziesiętne.

$$\log_{10} a = \log a.$$

$$1) a b c = x$$

$$\log x = \log a + \log b + \log c.$$

$$2) x = a^2 b^3$$

$$\log x = \log a^2 \cdot \log b^3 = 2 \cdot \log a + 3 \cdot \log b.$$

$$3) x = \frac{a^2}{b c}$$

$$\log x = 2 \cdot \log a - (\log b + \log c).$$

$$4) x = \frac{a^2 \sqrt{b}}{5 c}$$

$$\log x = 2 \cdot \log a + \frac{\log b}{2} - (\log 5 + \log c).$$

Zadanie.

14. X. 36.

$$1) x = \frac{a b}{c}$$

$$\log x = \log a + \log b - \log c.$$

$$2) x = a b^n$$

$$\log x = \log a + n \cdot \log b.$$

$$3) x = a^3 b^5$$

$$\log x = 3 \cdot \log a + 5 \cdot \log b.$$

$$4) x = a^5 b^3$$

$$\log x = 5 \cdot \log a + 3 \cdot \log b.$$

$$5) x = \sqrt[3]{c} \cdot \sqrt{c}$$

$$\log x = \frac{\log c}{3} + \frac{\log c}{2} = \frac{2 \cdot \log c + 3 \cdot \log c}{6} = \frac{5 \cdot \log c}{6}.$$

Lekcja 14.

16. X. 36.

$$1) x = \sqrt{\frac{a}{b^2}}$$

$$\log x = \frac{\log a - 2 \log b}{2}$$

$$2) x = \sqrt{\left(\frac{a \sqrt{b}}{c}\right)^3}$$

$$\log x = \frac{3(\log a + \frac{\log b}{2} - \log c)}{2}$$

$$3) X = \sqrt{a} \sqrt{b} \sqrt{c}$$

$$\log X = \frac{\log a + \log b + \log c}{2}$$

Stosowanie praw odwrotnych:

$$1) \log 2 + \log 5 = \log 10 = 1.$$

$$2) \log 20 - \log 2 = \log 10 = 1.$$

$$3) \log 4 + \log 5 - \log 2 = \log 20 - \log 2 = \log 10 = 1.$$

$$4) \log 40 - 2 \log 2 = \log 40 - \log 2^2 = \log \frac{40}{4} = \log 10 = 1.$$

Zadanie.

16. X. 36.

$$1) \log 900 - \log 9 = \log 100 = 2.$$

$$2) 2 \log 20 - \log 4 = \log 400 - \log 4 = \log 100 = 2.$$

$$3) 1 + 2 \log 3 - \log 90 = \log 10 + \log 9 - \log 90 = \log 90 - \log 90 = \log 1 = 0.$$

$$4) \log 36 - 2 \log 15 + 4 \log 5 = \log 36 - \log 225 + \log 625 = \log \left(\frac{36}{225} \right) + \log 625 = \log \left(\frac{36 \cdot 625}{225} \right) = \log 100 = 2.$$

Lekcja 15.

17. X. 36.

$$1) \log 1400 - 2 \log 7 + \log 3.5 = \log \frac{1400 \cdot 3.5}{49} = \log \frac{200 \cdot 3.5}{7} = \log \frac{200}{2} = \log 100 = 2.$$

$$2) \log 20 + \frac{1}{2} \log 2 - \frac{3}{2} \log 200 = \log 20 + \log 2^{\frac{1}{2}} - \log 200^{\frac{3}{2}} = \log 20 + \log \frac{2}{200^{\frac{3}{2}}} = \log \frac{20 \cdot 2}{200^{\frac{3}{2}}} = \log \frac{20 \cdot 2}{200 \cdot 200} = \log \frac{20 \cdot 2}{40000} = \log \frac{1}{2000} = \log \frac{1}{100} = -2.$$

$$3) \frac{1}{2} \log 0.36 - \log 15 + 2 \log 5 = \log 0.36^{\frac{1}{2}} - \log 15 + \log 25 = \log \frac{0.36^{\frac{1}{2}} \cdot 25}{15} = \log \frac{0.36 \cdot 25}{15} = \log \frac{0.6 \cdot 25}{15} = \log \frac{0.6 \cdot 5}{3} = \log 1 = 0.$$

Zadanie.

20. X. 36.

$$1) 2 \log 2 + \log 5 + \log 0.5 = \log 20 + \log 0.5 = \log 10 = 1.$$

$$2) \log 0.5 + \frac{1}{3} \log 8 = \log 0.5 + \log 2 = \log 1 = 0.$$

$$3) \log 125 + \frac{1}{2} \log 36 + 2 \log 2 - \log 3 = \log 125 + \log 6 + \log 4 - \log 3 = \log \frac{125 \cdot 6 \cdot 4}{3} = \log \frac{3000}{3} = \log 1000 = 3.$$

Lekcja 16.

21. X. 36.

$$\log 10000 = 4.$$

$$\log 1000 = 3.$$

$$\log 100 = 2.$$

$$\log 10 = 1.$$

$$\log 1 = 0.$$

$$\log \frac{1}{10} = -1.$$

$$3) X = \sqrt{a} \sqrt{b} \sqrt{c}$$

$$\log X = \frac{\log a + \log b + \log c}{2}$$

Stosowanie praw odwrotnych:

$$1) \log 2 + \log 5 = \log 10 = 1.$$

$$2) \log 20 - \log 2 = \log 10 = 1.$$

$$3) \log 4 + \log 5 - \log 2 = \log 20 - \log 2 = \log 10 = 1.$$

$$4) \log 40 - 2 \log 2 = \log 40 - \log 2^2 = \log \frac{40}{4} = \log 10 = 1.$$

Zadanie.

16. X. 36.

$$1) \log 900 - \log 9 = \log 100 = 2.$$

$$2) 2 \log 20 - \log 4 = \log 400 - \log 4 = \log 100 = 2.$$

$$3) 1 + 2 \log 3 - \log 90 = \log 10 + \log 9 - \log 90 = \log 90 - \log 90 = \log 1 = 0.$$

$$4) \log 36 - 2 \log 15 + 4 \log 5 = \log 36 - \log 225 + \log 625 = \log \left(\frac{36}{225} \right) + \log 625 = \log \left(\frac{36 \cdot 625}{225} \right) = \log 100 = 2.$$

Lekcja 15.

17. X. 36.

$$1) \log 1400 - 2 \log 7 + \log 3.5 = \log \frac{1400 \cdot 3.5}{49} = \log \frac{200 \cdot 3.5}{7} = \log \frac{200}{2} = \log 100 = 2.$$

$$2) \log 20 + \frac{1}{2} \log 2 - \frac{3}{2} \log 200 = \log 20 + \log 2^{\frac{1}{2}} - \log 200^{\frac{3}{2}} = \log 20 + \log \frac{2^{\frac{1}{2}}}{200^{\frac{3}{2}}} = \log \frac{20 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{200^{\frac{3}{2}}} = \log \frac{20 \cdot \sqrt{2}}{200^{\frac{3}{2}}} = \log 20 \sqrt{\frac{2}{8000000}} = \log 20 \sqrt{\frac{1}{4000000}} = \log 20 \left(\frac{1}{2000} \right) = \log \frac{1}{100} = -2.$$

$$3) \frac{1}{2} \log 0.36 - \log 15 + 2 \log 5 = \log 0.36^{\frac{1}{2}} - \log 15 + \log 25 = \log \frac{0.36^{\frac{1}{2}} \cdot 25}{15} = \log \frac{\sqrt{0.36} \cdot 25}{15} = \log \frac{0.6 \cdot 25}{15} = \log \frac{0.6 \cdot 5}{3} = \log 1 = 0.$$

Zadanie.

20. X. 36.

$$1) 2 \log 2 + \log 5 + \log 0.5 = \log 20 + \log 0.5 = \log 10 = 1.$$

$$2) \log 0.5 + \frac{1}{3} \log 8 = \log 0.5 + \log 2 = \log 1 = 0.$$

$$3) \log 125 + \frac{1}{2} \log 36 + 2 \log 6 - \log 3 = \log 125 + \log 6 + \log 4 - \log 3 = \log \frac{125 \cdot 6 \cdot 4}{3} = \log \frac{3000}{3} = \log 1000 = 3.$$

Lekcja 16.

21. X. 36.

$$\log 10000 = 4.$$

$$\log 1000 = 3.$$

$$\log 100 = 2.$$

$$\log 10 = 1.$$

$$\log 1 = 0.$$

$$\log \frac{1}{10} = -1.$$

$$\log \frac{1}{100} = -2.$$

$$\log \frac{1}{1000} = -3.$$

$$\log \frac{1}{10000} = -4.$$

.....

$$\log 0 = -\infty.$$

Logarytmy liczb całkowitych.

1. Logarytmy liczb całkowitych, będących potęgami liczby 10, są liczbami całkowitymi, różnymi wykładnikami potęgowym.

2. Logarytmy liczb całkowitych, niebędących potęgami liczby 10, są liczbami niewymiernymi.

3.) $\log 2$ nie jest liczbą całkowitą.

4.) mięprość.

$$\log 2 = \text{liczba całkowita}$$

$$10^{\text{liczba całk.}} = 2 \text{ (niemożliwe).}$$

5.) $\log 2$ nie jest miernikiem.

9.) mięprość.

$$\log 2 = \text{miernik}$$

$10^{\text{miernik}} = 2$ (niemożliwe); bo 10^{miernik} jest liczbą miernikiem.

$$\log 100 = 2.00000$$

$$\log 73 = 1.86332$$

$$\log 10 = 1.00000$$

Logarytmy każdej liczby całkowitej składa się z dwóch części: 1) z części całkowitej zwanej cechrą, którą sami obmyślamy na tej podstawie, że ona się zgadza z rzędem liczby logarytmowanej; 2) z części miernikowej zwanej mantysą, którą znajdujemy w tablicach.

$$\log 5 = 0.$$

$$\log 68 = 1.$$

$$\log 454 = 2.$$

$$\log 7638 = 3.$$

Lekcja 17.

23. X. 36.

$$\log 3864 = 3.58704.$$

$$\log 5283 = 3.72288.$$

$$\log 5371 = 3.73006.$$

$$\log 4542.76 = 5.65725 \quad 1 - 9 \text{ (różnica tablicowa).}$$

$$\frac{7}{5.65732.} \quad 0.76 - 0.76.9 \quad 6.84 \text{ (poprawka).}$$

jest to szukanie logarytmu przez interpolację liniową.

$$\log 8979.381 = 6.95323 \quad \frac{0.381.5}{1.905}$$

$$\frac{2}{6.95325.}$$

Zadanie.

23. X. 36.

Znaleźć logarytmy dowolnych sześciu liczb, więcej niż czterocyfrowych.

$$\log 12385 = 4.09272 \quad \frac{0.5.35}{17.5}$$

$$\frac{17}{4.09289 \text{ (średn. } 4.09290 \text{)}}.$$

$$\log 136394 = 5.13450 \quad \frac{0.94.31}{29}$$

$$\frac{29}{5.13479.}$$

$$\log 3865.981 = 6.58715 \quad \frac{0.981.11}{11}$$

$$\frac{11}{6.58726.}$$

$$\log 6421.135 = 6.80760 \quad \frac{0.135.7}{1}$$

$$\frac{1}{6.80761.}$$

$$\log 432768 = 5.63619 \quad \frac{0.68.20}{6.8}$$

$$\frac{7}{5.63626.}$$

$$\log 9325674 = 6.96965 \quad \frac{0.674.5}{3}$$

$$\frac{3}{6.96968.}$$

$$\log 85684327 = 7.93288 \quad \frac{0.4327.5}{2}$$

$$\frac{2}{7.93290.}$$

$$\log 135968230 = 8.13322 \quad \frac{0.68230.32}{22}$$

$$\frac{22}{8.13344.}$$

$$\frac{136460}{204690} \quad \frac{2183360}{2183360}$$

Lekcja 18.

24. X. 36.

$$\log 75 \underline{236} = 4.87639$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 4.87643 \end{array}$$

$$\frac{0.6 \cdot 6}{36}$$

$$\log 248 \underline{597} = 5.39533$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 5.39549 \end{array}$$

$$\frac{0.97 \cdot 17}{679} = 16.49$$

$$\log 767 \underline{548} = 5.88508$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 5.88510 \end{array}$$

$$\frac{0.48 \cdot 5}{240}$$

$$\log 2 = 0.30103$$

$$\log 200 = \log(2 \cdot 100) =$$

$$\log 20 = 1.30103$$

$$\log 2 + \log 100 = 0.30103 + 2 =$$

$$\log 200 = 2.30103$$

$$= 2.30103.$$

$$\log 35.48 = \log \frac{3548}{100} = \log 3548 - \log 100 =$$

$$3.54998 - 2 = 1.54998.$$

Koncowe zero liczby całkowitej jakoteż kropka dziesiętna liczby dziesiętnej wpływają tylko na cechy.

$$\log 0.008452 = 0.92696 - 3$$

Logarytm każdej liczby składa się z cechy, która może być dodatnią, zerem i ujemną i z mantysy, która jest zawsze dodatnią.

Zadanie.

27. X. 36.

$$\log 138.25 = 2.14051$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 2.14066 \end{array}$$

$$\frac{0.5 \cdot 31}{15} = 155$$

$$\log 9.8386 = 0.99291$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 0.99293 \end{array}$$

$$\frac{0.6 \cdot 4}{24}$$

$$\log 0.032816 = 0.51601 - 2$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 0.51609 - 2 \end{array}$$

$$\frac{0.6 \cdot 13}{18} = 98$$

$$\log 15000000 = 7.17609$$

$$\log 25678.9 = 4.40943$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 4.40958 \end{array}$$

$$\frac{0.89 \cdot 17}{623} = 1513$$

$$\log 0.56813 = 0.75442 - 1$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 0.75444 - 1 \end{array}$$

$$\frac{0.3 \cdot 8}{24}$$

Lekcja 19.

28. X. 36.

$$\log 279.36 = 2.44607$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 2.44617 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.6 \cdot 16 \\ 36 \\ 96 \end{array}$$

$$\log X = 2.44617$$

$$\begin{array}{r} 607 \\ 10 \\ X = 279.36 \end{array}$$

$$10:16 = 0.6$$

$$0.837 \cdot 0.965 \cdot 3.14159 = X$$

$$\log X = \log 0.837 + \log 0.965 + \log 3.14159$$

$$\log X = 0.40441$$

$$\begin{array}{r} 432 \end{array}$$

$$X = 2.5375$$

$$0.92273 - 1$$

$$0.98453 - 1$$

$$0.49715$$

$$2.40441 - 2$$

$$X = \frac{0.8}{0.093}$$

$$\log X = \log 0.8 - \log 0.093$$

$$\log X = 0.93461$$

$$\begin{array}{r} 420 \end{array}$$

$$X = 86022$$

$$+ 0.90309 = 1$$

$$- 0.96848 = 2$$

$$0.93461$$

$$10:5 = 0.2$$

Zadanie.

29. X. 36.

$$1) \log X = \frac{3.82 \cdot 2.45}{93.8}$$

$$\log X = \log 3.82 + \log 2.45 - \log 93.8$$

$$\log X = 0.99903 - 2$$

$$\begin{array}{r} + 0.58206 - 2 \\ + 0.38917 \end{array}$$

$$X = 0.9997775$$

$$\begin{array}{r} 3.82:4:0.75 \\ 20 \\ - 1.97220 \\ 0.99903 - 2 \end{array}$$

$$2) X = \frac{0.973 \cdot 0.69}{0.917}$$

$$\log X = \log 0.973 + \log 0.69 - \log 0.917$$

$$\log X = 0.86459 - 1$$

$$\begin{array}{r} 457 \\ + 0.98811 - 1 \\ + 0.83885 - 1 \end{array}$$

$$X = 0.73213$$

$$\begin{array}{r} 20:6=0.3 \\ - 0.96237 - 1 \\ 0.86459 - 1 \end{array}$$

$$3) X = \frac{1.18}{523.874}$$

$$\log X = \log 1.18 - (\log 523 + \log 87.4)$$

$$\log X = 0.36482 - 3$$

$$\begin{array}{r} 474 \\ + 0.07188 - 3 \\ - 0.71850 \end{array}$$

$$X = 0.002316421$$

$$\begin{array}{r} 80:15=0.481 \\ 40 \\ + 1.98856 \\ 0.36482 - 3 \end{array}$$

Lekcja 20.

30. X. 36.

$$1) 0.735^3 = X$$

$$\log X = 3 \log 0.735;$$

$$\log X = 0.59887 - 1.$$

$$X = 0.39707.$$

$$80:11 = 0.7$$

$$2) \sqrt[5]{0.023} = X$$

$$\log X = \frac{\log 0.023}{5};$$

$$\log X = 0.67235 - 1.$$

$$X = 0.47028$$

$$70:9 = 0.8$$

$$3) X = 4.7^3 \cdot \sqrt{3.14}$$

$$\log X = 3 \log 4.7 + \frac{\log 3.14}{2}$$

$$\log X = 2.26476$$

$$X = 183.97$$

$$180:24 = 0.7$$

$$3(0.86629 - 1)$$

$$2.59887 - 3$$

$$0.49693:2$$

$$0.67210 \cdot 3$$

$$2.01630$$

$$0.24846$$

$$2.26476$$

$$4) X = \frac{3.14^2 \sqrt{5}}{\sqrt{7.5 \cdot 13.4}}$$

$$\log X = 2 \log 3.14 + \frac{\log 5}{2} - \frac{\log 7.5 + \log 13.4}{2}$$

$$\log X = 0.65645$$

$$X = 4.5337$$

$$60:9=0.7$$

$$0.87506$$

$$0.26578$$

$$1.14080:2$$

$$0.69897:3$$

$$0.49693:2$$

$$0.99386$$

$$0.23299$$

$$1.22685$$

$$0.57040$$

$$0.53148:2$$

Zadanie.

30. X. 36.

$$1) \sqrt[3]{7} = X$$

$$\log X = \frac{\log 7}{3}$$

$$\log X = 0.28170$$

$$X = 1.9129$$

$$0.84510:3$$

$$210:22 = 0.9$$

$$2) X = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{0.7}$$

$$\log X = \frac{\log 2}{3} + \frac{\log 0.7}{2}$$

$$\log X = 1.02289 - 1 = 0.02289$$

$$X = 1.0541$$

$$0.30103:3$$

$$0.10034$$

$$0.92255 - 1$$

$$+1 - 1$$

$$(0.84510 - 1):2$$

$$50:41 = 0.1$$

$$3) x = \frac{4.87^2}{3 \sqrt{0.3}}$$

$$\log x = 2 \log 4.87 - \left(\log 3 + \frac{\log 0.3}{2} \right)$$

$$\begin{array}{r} 0.47712 \quad -1 \\ \hline 0.47712 \quad -1 \\ 0.73856 \quad -1 \\ \hline 1.15938 \end{array}$$

$$\log x = 1.15938$$

$$x = 14.434$$

$$4) x = \frac{1}{7.2 \sqrt{0.53}}$$

$$\log x = \log 1 - \left(2 \log 7.2 + \frac{\log 0.53}{2} \right)$$

$$\begin{array}{r} 0.72428 \quad -1 \\ \hline 0.72428 \quad -1 \\ 0.85733 \quad -2 \\ \hline 1.71466 \\ 0.86214 \quad -1 \\ \hline 2.57680 \quad -1 \end{array}$$

$$\log x = 0.42320 - 2$$

$$x = 0.026497$$

$$5) x = 3.75^3 \cdot \sqrt{0.5}$$

$$\log x = 3 \log 3.75 + \frac{\log 0.5}{2}$$

$$\log x = 1.57157$$

$$x = 37.288$$

Lekcja 21.

4. XI. 36

$$1) a^n = b$$

$$n = \log_a b$$

$$n \log a = \log b$$

$$n = \frac{\log b}{\log a}$$

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

Logarytm pewnej liczby o dowolnej zasadzie równa się logarytmowi dziesiętnemu tej liczby, podzielonemu przez logarytm dziesiętny tej zasady.

$$\log_5 125 = \frac{\log 125}{\log 5} = \frac{2.09691}{0.69897} = 3$$

$$2) 10^x = 125$$

$$2^x \cdot 5^x = 5^3$$

$$2^x = 5^{3-x}$$

$$x = \frac{3 \log 5}{\log 2 + \log 5}$$

$$x = \frac{2.09691}{1}$$

$$x \log 2 = (3-x) \log 5$$

$$x \log 2 = 3 \log 5 - x \log 5$$

$$x \log 2 + x \log 5 = 3 \log 5$$

$$x (\log 2 + \log 5) = 3 \log 5$$

$$x = 2.09691$$

Równania logarytmowe.

Równanie logarytmowe jest to równanie, w którym niewiadoma występuje jako liczba logarytmowana. Należy do równań przesłanych.

Stosując odwrotne prawa logarytmowania przekształcamy równanie logar. tak, aby po obu stronach równania miało po jednym logarytmie z tych samych zasadach. Wtedy wnioskujemy, że równym logarytmom w równych zasadach odpowiadają równe liczby logarytmowane i dochodzimy do równania algebraicznego.

$$\begin{aligned}
 1) \log 2 + \frac{3}{2} \log(6-x) &= \log(2x-9) + \frac{1}{2} \log(9-x) \\
 2 \log 2 + 3 \log(6-x) &= 2 \log(2x-9) + \log(9-x) \\
 \log 4 + \log(6-x)^3 &= \log(2x-9)^2 + \log(9-x) \\
 \log[4 \cdot (6-x)^3] &= \log[(2x-9)^2 \cdot (9-x)] \\
 4 \cdot (6-x)^3 &= (2x-9)^2 \cdot (9-x) \\
 4 \cdot (216 - 108x + 18x^2 - x^3) &= (4x^2 - 36x + 81)(9-x) \\
 864 - 432x + 72x^2 - 4x^3 &= 36x^2 - 324x + 729 - 4x^3 \\
 &+ 36x^2 - 81x
 \end{aligned}$$

$$-27x = -135$$

$$x = 5$$

Zadanie.

5. XI. 34

$$2) \log x + \log(x+1) = \log(x-2) + \log(x+4)$$

$$\log[x \cdot (x+1)] = \log[(x-2) \cdot (x+4)]$$

$$x \cdot (x+1) = (x-2) \cdot (x+4)$$

$$x^2 + x = x^2 - 2x + 4x - 8$$

$$+x = +8$$

$$3) \log(x+2) + \log(2x-3) = \log 2 + \log(x+1) + \log(x-1)$$

$$\log[(x+2) \cdot (2x-3)] = \log[2 \cdot (x+1) \cdot (x-1)]$$

$$(x+2) \cdot (2x-3) = (2x+2) \cdot (x-1)$$

$$2x^2 + 4x - 3x - 6 = 2x^2 + 2x - 2x - 2$$

$$x = 4$$

$$4) \log(2x-1) - \log(x+2) = \log 2 - \log(3x+1) + \log(3x-4)$$

$$\log\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \log\left|\frac{2 \cdot (3x-4)}{3x+1}\right|$$

$$\frac{2x-1}{x+2} = \frac{6x-8}{3x+1}$$

$$(2x-1) \cdot (3x+1) = (6x-8) \cdot (x+2)$$

$$6x^2 - 3x + 2x - 1 = 6x^2 - 8x + 12x - 16.$$

$$-5x = -15.$$

$$x = 3.$$

Lekcja 22.

$$1) \quad L \log(3-2x) - \log(3-x) = \log(1-x) + 2 \log 2.$$

$$\log(3-2x)^2 - \log(3-x) = \log(1-x) + \log 4.$$

$$\log \left(\frac{9-12x+4x^2}{3-x} \right) = \log(1-x) + \log 4.$$

$$\frac{9-12x+4x^2}{3-x} = 4-4x.$$

$$9-12x+4x^2 = (4-4x)(3-x).$$

$$9-12x+4x^2 = 12-12x-4x+4x^2.$$

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4}.$$

$$L = 2 \log(3-\frac{3}{4}) - \log(3-\frac{3}{4}).$$

$$L = 2 \log \frac{9}{4} - \log \frac{9}{4}.$$

$$L = \log \frac{9}{4} - \log \frac{9}{4}.$$

$$L = 0.$$

$$P = \log \frac{1}{4} + \log 4.$$

$$P = \log \frac{4}{4} = \log 1 = 0.$$

$$L = P.$$

6. XI. 26.

$$2) \quad 1 - \log(2x-11) = \log(5x-22) - 2 \log(x-5).$$

$$\log 10 - \log(2x-11) = \log(5x-22) - \log(x-5)^2.$$

$$\log \frac{10}{2x-11} = \log \frac{5x-22}{x^2-10x+25}.$$

$$\frac{10}{2x-11} = \frac{5x-22}{x^2-10x+25}.$$

$$10x^2 - 100x + 250 = 10x^2 - 44x - 55x + 242.$$

$$+x = +8.$$

$$L = 1 - \log 5.$$

$$L = \log 10 - \log 5 = \log \frac{10}{5} = \log 2.$$

$$P = \log 18 - \log 9.$$

$$P = \log 2.$$

$$L = P.$$

$$3) \quad 1 - 2 \log(x+3) = \log 5 - \log(7x-3).$$

$$\log 10 - \log(x+3)^2 = \log 5 - \log(7x-3).$$

$$\log \frac{10}{x^2+6x+9} = \log \frac{5}{7x-3}.$$

$$70x - 30 = 5x^2 + 30x + 45.$$

$$5x^2 - 40x + 75 = 0.$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0.$$

$$\Delta = 2; \quad x = \frac{8 \pm 2}{2}.$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 5.$$

$$4) \log_{x+1} 5 = 1$$

$$\log_{x+1} 5 = \log_{x+1} (x+1)^1$$

$$x+1 = 5$$

$$x = 4$$

$$\sqrt{2} = \log_{100} = \log_{10} 10^{\frac{1}{2}}$$

$$5) \log_{x-2} (x^2 - 3x) = 2$$

$$\log_{x-2} (x^2 - 3x) = \log_{x-2} (x-2)^2$$

$$x^2 - 3x = x^2 - 4x + 4$$

$$x = 4$$

$$L = \log_2 4 = 2$$

$$9 = 2$$

$$L = 9$$

Zadanie.

6. XI. 36.

$$1) 2 \log (x+5) = 1 + \log (3x-5)$$

$$\log (x^2 + 10x + 25) = \log (30x - 50)$$

$$x^2 + 10x + 25 = 30x - 50$$

$$x^2 - 20x + 75 = 0$$

$$x = \frac{20 \pm 10}{2}$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = 15$$

$$L = 2 \log 10$$

$$L = 2$$

$$9 = 2$$

$$9 = 2$$

$$2) \log_x (x^2 - 3) - \log_x (x-1) = 1$$

$$\log_x (x^2 - 3) - \log_x (x-1) = \log_x x^1$$

$$\log_x \left(\frac{x^2 - 3}{x-1} \right) = \log_x x^1$$

$$x^2 - 3 = x^2 - x$$

$$x = 3$$

$$9 = 1$$

$$L = \log_3 6 - \log_3 2$$

$$L = \log_3 \frac{6}{2} = \log_3 3 = 1$$

$$9 = L$$

$$3) \frac{1}{3} + \log_{x+2} 10 = 2 \log_{x+2} \sqrt[3]{100}$$

$$1 + 3 \log_{x+2} 10 = 6 \log_{x+2} \sqrt[3]{100}$$

$$\log_{x+2} (x+2)^1 + \log_{x+2} 1000 = \log_{x+2} 10000$$

$$\log_{x+2} [(x+2) \cdot 1000] = \log_{x+2} 10000$$

$$1000x + 2000 = 10000$$

$$1000x = 8000$$

$$x = 8$$

$$L = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$9 = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$L = 9$$

Lekcja 23.

7. XI. 36.

Funkcja logarytmowa.

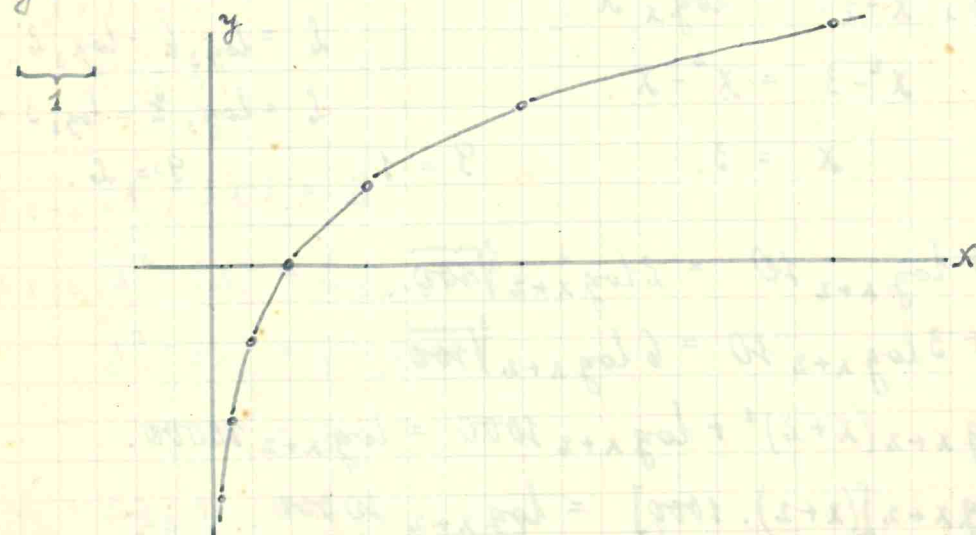
$$y = \log_a x$$

$$a > 1$$

$$x > 0$$

$$y = \log_2 x$$

x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
y	3	2	1	0	-1	-2	-3



Rachunek procentu składanego.

$$1) \quad J = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}$$

Jeżeli kapitał nie zmienia się z czasem, a tylko rośnie dochód to posiadamy, że kapitał jest złożony na procent prosty.

Jeżeli zaś dochód od kapitału dotacza się co pewien okres czasu do kapitału tak, iż w następnym okresie procentuje się

kapitał wraz z dotychczasowym dochodem, to posiadamy, że kapitał został złożony na procent składany.

Polisanie dochodu do kapitału nazywamy kapitalizacją dochodu.

Okres czasu, co który to się odbywa nazywa się okresem kapitalizacji.

Przy procentie składanym rośnie kapitał. Wartość kapitału po n latach nazywamy wartością końcową, a wartość pierwotną, wartością początkową.

I. Obliczanie wartości końcowej kapitału.

1.) $K, p\%, n$ -lat.

2.) K_n .

$$K_1 = K + \frac{K \cdot p \cdot 1}{100} = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^1$$

$$K_2 = K_1 + \frac{K_1 \cdot p \cdot 1}{100} = K_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

$$K_3 = K_2 + \frac{K_2 \cdot p \cdot 1}{100} = K_2 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$

$$\underline{K_n = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

$$K_n = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$1 + \frac{p}{100} = q \text{ (czynnik procentowy).}$$

$$\underline{K_n = K \cdot q^n}$$

$$1_1 = 1 + \frac{1 \cdot p \cdot 1}{100}$$

$$1_1 = 1 + \frac{p}{100} = q$$

$$1) K = 2800 \text{ zł. } p = 5\% \quad n = 15 \text{ l.}$$

$$Q = \frac{2800 \cdot 5 \cdot 15}{100} = 140 \cdot 15 = 2100 \text{ zł.}$$

$$K + Q = 4900 \text{ zł.}$$

$$2) 1) K = 2800 \text{ zł. } p = 5\% \quad n = 15 \text{ l.}$$

$$2) K_n$$

$$K_n = K \cdot q^n$$

$$\log K_n = \log K + n \log q$$

$$\log K_n = 3.44716 + 0.31785$$

$$\log K_n = 3.76501$$

$$* K_n = 582.14$$

$$q = 1 + \frac{5}{100}$$

$$q = 1.05$$

$$0.02119 \cdot 15$$

$$\frac{0.31785}{0.31785}$$

$$\frac{1.05}{30} = 0.14$$

$$2) 1) K = 8540 \text{ zł. } p = 4\frac{1}{2}\% \quad n = 10 \text{ l. (póć.)}$$

$$2) K_n$$

$$K_n = K \cdot q^n$$

$$\log K_n = \log K + n \log q$$

$$q = 1 + \frac{4.5}{100}$$

$$q = 1.045$$

Zadanie.

$$1) 1) K = 8540 \text{ zł. } p = 4\frac{1}{2}\% \quad n = 10 \text{ l. (póć.)}$$

$$2) K_n$$

$$K_n = K \cdot q^n$$

$$\log K_n = \log K + n \log q$$

$$q = 1 + \frac{4.5}{100}$$

$$q = 1.045$$

$$0.00945$$

$$21$$

$$0.5 \cdot 43$$

$$3.93146$$

$$0.00966 \cdot 20$$

$$215$$

$$0.19320$$

$$0.19320$$

$$4.12466$$

$$\log K_n = 4.12466$$

$$\frac{16.133}{280} = 0.49$$

$$K_n = 13324.9 \text{ zł.}$$

$$2) 1) K = 234000 \text{ ludn. } p = 2\frac{1}{2}\% \quad n = 10 \text{ l.}$$

$$2) K_n$$

$$K_n = K \cdot q^n$$

$$\log K_n = \log K + n \cdot \log q$$

$$0.01072 \cdot 10 \quad 5.36922$$

$$0.10720$$

$$\log K_n = 5.47642$$

$$640$$

$$20 : 14 = 0.15$$

$$K_n = 299515 \text{ ludn.}$$

Sekeja 25.

$$1) \text{ G.) } K_n = 22532 \text{ ludn. } n = 15 \text{ l.}$$

$$p = 2\frac{3}{4}\%$$

$$\text{Z.) } K.$$

$$K_n = K \cdot q^n$$

$$K = \frac{K_n}{q^n}$$

$$q = 1 + \frac{2.75}{100}$$

$$q = 1.0275$$

$$\log K = \log K_n - n \log q$$

$$0.01157$$

$$21$$

$$0.01178 \cdot 15$$

$$5890$$

$$0.17670$$

$$0.2 \cdot 19$$

$$18$$

$$3.8$$

$$0.5 \cdot 42$$

$$20$$

$$20$$

$$21$$

$$4.35276$$

$$4$$

$$4.35380$$

$$0.17670$$

$$4.17610$$

$$\log K = 4.17610$$

$$609$$

$$20 : 29 = 0.0345$$

$$K = 15000345$$

$$2) \text{ G.) } K = 1500 \text{ zł. } n = 5 \text{ l. } K_n = 2204 \text{ zł.}$$

$$\text{Z.) } p\%$$

$$K_n = K \cdot q^n$$

$$q^n = \frac{K_n}{K}$$

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K}}$$

$$\log q = \frac{\log K_n - \log K}{n}$$

$$\log q = 0.033424$$

$$342$$

$$q = 1.080$$

$$1 + \frac{p}{100} = 1.08$$

$$\frac{p}{100} = 0.08$$

$$p = 8\%$$

Zadanie.

Z jakiego kapitału danego na procent składany na 25 lat przy $4\frac{3}{4}\%$ powstanie $K_n = 5042.67 \text{ zł.}$

$$\text{G.) } K_n = 5042.67 \text{ zł. } p = 4\frac{3}{4}\% \quad n = 25 \text{ l.}$$

$$\text{Z.) } K.$$

$$K_n = K \cdot q^n$$

$$K = \frac{K_n}{q^n}$$

$$\log K = \log K_n - n \log q$$

3.70260	0.67.9	0.01995
6	6.03	20
3.70266	0.5.41	0.02015.25
-0.50375	20	10075
3.19891	20.5	4030
		0.50375

$$\log K = 3.19891$$

866

$$250:27 = 0.93$$

-70

$$K = 1580.93 \text{ zł.}$$

Zadanie.

24. XI. 36.

Na ile procent składany należy wypisywać kapitał, aby potroić się po 20-letach.

$$1) n = 20 \text{ l.} \quad K_n = 3K$$

$$2) p \%$$

$$K_n = K \cdot q^n$$

$$3K = K \cdot q^n$$

$$3 = q^n$$

$$q = \sqrt[20]{3}$$

$$\log q = \frac{\log 3}{20}$$

$$0.47712 : 20 = 0.02385$$

$$\log q = 0.02385$$

366

$$q = 1.05646$$

$$19:41 = 0.46$$

260

$$1 + \frac{p}{100} = 1.05646$$

$$\frac{p}{100} = 0.05646$$

$$p = 5.646 \%$$

Leżyja 26.

$$1) K = 8000 \text{ zł.}$$

$$p = 3 \%$$

$$2) \text{ lata } n \text{ - do } 16753 \text{ zł.} = K_n$$

$$K_n = K \cdot q^n$$

$$q^n = \frac{K_n}{K}$$

$$n \log q = \log K_n - \log K$$

$$n = \frac{\log K_n - \log K}{\log q}$$

$$n = 25 \text{ l.}$$

$$4.22401$$

8

03.26

$$4.22409$$

$$3.90209$$

$$0.32100$$

$$0.01282$$

$$1.03 = q$$

$$32.100 : 1284 =$$

$$8025 : 321 =$$

$$2645 : 107 = 25$$

$$535$$

$$1) K' = 8000 \text{ zł.} \quad p' = 5\% ; K'' = 12000 \text{ zł.} \quad p'' = 3\%$$

$$2) \text{ Po ilu latach } n \text{ się równają. } [K'_n = K''_n]$$

$$K_n = K \cdot q^n$$

$$K'_n = K''_n$$

$$K' \cdot q_1^n = K'' \cdot q_2^n$$

$$q_1^n = \frac{K'' \cdot q_2^n}{K'}$$

$$\frac{q_1^n}{q_2^n} = \frac{K''}{K'}$$

$$\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^n = \frac{K''}{K'}$$

$$n(\log q_1 - \log q_2) = \log K'' - \log K'$$

$$n = \frac{\log K'' - \log K'}{\log q - \log 2}$$

$$\begin{array}{r} 0.02119 \\ - 0.01284 \\ \hline 0.00835 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4.07918 \\ - 3.20309 \\ \hline 0.87609 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.87609 : 0.00835 = 104.32 \\ 104.32 : 2 = 52.16 \end{array}$$

$$n = 21 \text{ l.}$$

Zadanie.

26. XI. 36.

Do ilu latok kapital dany na procent skladany

$p = 4\%$ potroi sie.

$$1) p = 4\% \quad K_n = 3K$$

$$2) n.$$

$$K_n = K \cdot q^n$$

$$3K = K_n$$

$$3K = K \cdot q^n$$

$$q^n = 3$$

$$n \cdot \log q = \log 3$$

$$n = \frac{\log 3}{\log q}$$

$$n = 28 \text{ l.}$$

$$\begin{array}{r} 0.47712 : 0.01703 = 28 \\ 0.47712 : 0.01703 = 28 \\ \hline 13656 \end{array}$$

Lekcja 27.

27. XI. 36

I. Obliczanie wartosci koncowej stalych wkladok rocznych.

$$n, r, p\%, R_n = ?$$

a) w chwili zlozenia ostatniej wkladki.

$$S_n = r + rq + rq^2 + rq^3 + \dots + rq^{n-1} \quad (\text{postep geom.})$$

$$R_n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

b) w rok po zlozeniu ostatniej wkladki.

$$R_n = rq + rq^2 + rq^3 + \dots + rq^n$$

$$R_n = \frac{rq(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$1) n = 12 \text{ l.} \quad K = 170 \text{ zl.} \quad p = 3\frac{1}{2}\% \quad \sim 2)$$

$$2a) R_n$$

$$R_n = \frac{rq(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$\log R_n = \log r + \log q + \log(q^n - 1) - \log(q - 1)$$

$$\log R_n = \log 170 + \log 1.035 + \log 0.51107 - \log 0.035$$

$$x = 1.035^{12}$$

$$\log x = 12 \cdot \log 1.035$$

$$\log x = 0.17928$$

$$x = 1.51107$$

$$\begin{array}{r} 0.01494 \cdot 12 \\ 2988 \\ \hline 0.17928 \end{array}$$

$$200 : 29 = 0.07$$

Zadanie.

27. XI. 36.

1) Jaki kapitał przedstawią w chwili ostatniej wpłaty raty po 250 zł. wpłacane przez 20 lat licząc 5% składany.

$$1) r = 250 \text{ zł.} \quad n = 20 \text{ l.} \quad p = 5\%$$

$$2) R_n$$

$$R_n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$\log R_n = \log r + \log(q^n - 1) - \log(q - 1)$$

$$\log R_n = \log 250 + \log 1.65338 - \log 0.05$$

$$x = 1.05^{20}$$

$$\log x = 20 \cdot \log 1.05$$

$$\log x = 0.42380$$

$$x = 2.65338$$

$$0.21827$$

$$+1.61631$$

$$0.69897 - 2$$

$$2.91734 + 0.1$$

$$0.02119 \cdot 20$$

$$60 : 16 = 0.38$$

$$2.39794$$

$$0.21837$$

$$3.61631$$

$$\log R_n = 3.91734 - 4$$

$$730$$

$$R_n = 82668 \text{ zł.}$$

$$40 : 5 = 0.8$$

$$2) r = 170 \text{ zł.}$$

$$n = 12 \text{ l.}$$

$$p = 3\frac{1}{2}\% \sim 9\%$$

$$2) R_n \text{ (w rok po ostatniej wpłacie)}$$

$$R_n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$\log R_n = \log r + \log q + \log(q^n - 1) - \log(q - 1)$$

$$\log R_n = \log 170 + \log 1.035 + \log 0.51107 - \log 0.035$$

$$x = 1.035^{12}$$

$$\log x = 12 \cdot \log 1.035$$

$$\log x = 0.17928$$

$$x = 1.51107$$

$$2.23045$$

$$0.01494$$

$$0.70848 - 1$$

$$+1.95387 - 1$$

$$0.54407 - 2$$

$$3.40980 + 1$$

$$0.70848 - 1$$

$$6$$

$$0.7.9$$

$$6.3$$

$$0.01494 \cdot 12$$

$$2988$$

$$0.17928$$

$$200 : 29 = 0.07$$

$$\log R_n = 3.40980$$

$$976$$

$$R_n = 256924 \text{ zł.}$$

Lekcja 28.

28. XI. 36

$$1) 1) r = 422.2 \text{ zł.}$$

$$p = 5\%$$

$$R_n = 6720 \text{ zł.}$$

$$2) n$$

$$R_n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$r q^n = R_n(q - 1) + r$$

$$r(q^n - 1) = R_n(q - 1)$$

$$q^n = \frac{R_n(q - 1) + r}{r}$$

$$r q^n - r = R_n(q - 1)$$

$$n \cdot \log q = \log[R_n(q - 1) + r] - \log r$$

$$n = \frac{\log[R_n(q-1) + r] - \log r}{\log q}$$

$$n = 12 \text{ l.}$$

$$\begin{array}{r} 6720 \cdot 0'05 \\ 336'00 \\ 2'87978 \\ 2'62552 \\ \hline 0'25426 : 0'02119 = \\ 25426 : 2119 = 12 \\ 4236 \end{array}$$

Zadanie.

1. XI. 36.

1) Jaka ma byé roczna wkładka na procent składowy $4\frac{1}{2}\%$ przez 14 lat, aby w rok po umieszczeniu ostatniej wkładki powstał kapitał 5341'69 zł.

a) $p = 4\frac{1}{2}\%$. $n = 14 \text{ l.}$ $R_n = 5341'69 \text{ zł.}$

b.) r .

$$R_n = \frac{rq(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$rq(q^n - 1) = R_n(q - 1)$$

$$rq \cdot q^n - rq = R_n(q - 1)$$

$$rq \cdot q^n = R_n(q - 1) + rq$$

$$q^n = \frac{R_n(q - 1) + rq}{rq}$$

$$n \log q = \log[R_n(q - 1) + rq] - (\log r + \log q)$$

$$n = \frac{\log[R_n(q - 1) + rq] - (\log r + \log q)}{\log q}$$

m. i.

Zadanie.

1. XII. 36.

1) Jaka ma byé roczna wkładka na procent składowy $4\frac{1}{2}\%$ przez 14 lat, aby w rok po umieszczeniu ostatniej wkładki powstał kapitał 5341'69 zł.

a) $p = 4\frac{1}{2}\%$. $n = 14 \text{ l.}$ $R_n = 5341'69 \text{ zł.}$

b.) r .

$$R_n = \frac{rq(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$rq(q^n - 1) = R_n(q - 1)$$

$$rq \cdot q^n - rq = R_n(q - 1)$$

$$rq \cdot q^n = R_n(q - 1) + rq$$

$$r = \frac{R_n(q - 1)}{q(q^n - 1)}$$

$$\log r = \log R_n + \log(q - 1) - [\log q + \log(q^n - 1)]$$

$$\begin{array}{l} X = q^n \\ \log X = n \log q \\ \log X = 0'26768 \\ 764 \\ X = 1'85217 \end{array}$$

$$\log r = 2'43125$$

$$r = 2'69931 - 2'70 \text{ zł.}$$

2) Po ilu latach wnosząc rocznie wkładki po 80 zł. na procent składany 7% do sumy 4979.92 zł.

1) $r = 80 \text{ zł.}$ $p = 7\%$ $P_n = 4979.92 \text{ zł.}$

2) $n.$

$$P_n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$rq(q^n - 1) = P_n(q - 1)$$

$$rq \cdot q^n - rq = P_n(q - 1)$$

$$rq \cdot q^n = P_n(q - 1) + rq$$

$$q^n = \frac{P_n(q - 1) + rq}{rq}$$

$$n \cdot \log q = \log[P_n(q - 1) + rq] - (\log r + \log q)$$

$$n = \frac{\log[P_n(q - 1) + rq] - (\log r + \log q)}{\log q}$$

$$\frac{1.07 \cdot 80}{8560}$$

$$3.63759$$

$$9$$

$$3.63768$$

$$1.93247$$

$$0.70521 : 0.02938 =$$

$$24.021 : 2.938 = 24$$

$$11761$$

$$\frac{4979.92 \cdot 0.07}{8560}$$

$$348.5944$$

$$85.6$$

$$434.1944$$

$$0.944 \cdot 10$$

$$1.90309$$

$$0.02938$$

$$n = 24 \text{ l.}$$

Lekcja 29.

2. XII. 36

III. Umorzenie długu ratami rocznymi.

$$K q^{n-1} = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{raty płatne z góry.}$$

$$K q^n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{" " z dołu.}$$

1) $K = 2506.44 \text{ zł.}$ $n = 8$ $p = 4\frac{1}{2}\%$

2) $r.$

$$K \cdot q^n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$r(q^n - 1) = K \cdot q^n (q - 1)$$

$$r = \frac{K \cdot q^n (q - 1)}{q^n - 1}$$

$$\log r = \log K + \log(q^n) + \log(q - 1) - \log(q^n - 1)$$

$$\log r = 2.57977$$

$$r = 379.9 = 380 \text{ zł.}$$

2) 1) $K = 1500000 \text{ zł.}$ $p = 6\frac{1}{2}\%$ $r = 107850 \text{ zł.}$

2) $n.$

Zadanie.

3. XII. 36.

1.) $K = 1500000 \text{ zł.}$ $p = 4.065\%$ $r = 107850 \text{ zł.}$

2.) n . (raty płatne z góry).

$$K \cdot q^{n-1} = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$r(q^n - 1) = K \cdot q^{n-1}(q - 1)$$

$$r q^n - r = K \cdot q^{n-1}(q - 1)$$

$$r q^n - K \cdot q^{n-1}(q - 1) = r$$

$$q^{n-1}[r q - K(q - 1)] = r$$

$$q^{n-1} = \frac{r}{r q - K(q - 1)}$$

$$q^n = \frac{r q}{r q - K(q - 1)}$$

$$n \log q = \log r + \log q - \log [r q - K(q - 1)]$$

$$n = \frac{\log r + \log q - \log [r q - K(q - 1)]}{\log q}$$

$107850 \cdot 1.065$	1.065	$0.5 \cdot 40$	5.03262
539250		200	20
647100	$1500000 \cdot 0.065$		0.02735
107850	75		5.06047
114860.250	90		4.23956
97500	97500000		$0.82061 + 0.065$
17360.25	4.23955	$0.025 \cdot 25$	$22061:1065$
	1	125	
		50	
		0.625	

$0.82061 : 0.02735 =$
 $82.061 : 2.735 = 30.004$
 0.011000

$n = 30 \text{ l.}$

Lekcja 30.

4. XII. 36.

1.) $n = 5 \text{ lat}$ $r = 2373.72 \text{ zł.}$ $p = 6\%$

2.) K . (raty z dołu).

$$K \cdot q^n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$K = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)}$$

$$\log K = \log r + \log(q^n - 1) - [\log(q^n) + \log(q - 1)]$$

$X = 1.06^5$	0.7218	3.37530
$\log X = 5 \log 1.06$	576	13
	12.96	$0.52930 - 1$
	$0.02531 \cdot 5$	3.90473
	0.12655	$0.90470 - 2$
$\log X = 0.12655$		4.00003
$X = 1.3383$	$9.32 = 0.3$	
	0.3383	0.12655
$\log K = 4.00003$		$0.72815 - 2$
		$0.90470 - 2$

$K = 10000 \text{ zł.}$

IV. Obliczenie przyszłej wartości przedsięwzięcia, przynoszących co roku stały dochód (przez czas ograniczony).

r (st. doch.), n , R_0 .

Wzrost: $R_0 = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)}$

zdechn: $R_0 = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)}$

1) $r = 600$ zł. $n = 21$ l. $p = 5\%$.

$\log R_0 = \log r + \log(q^n - 1) - [\log(q^n) + \log(q - 1)]$

$\log R_0 = 3.88608$

0.96.15	0.96.24	2.78516	2.77815
420	384	0.44483	0.25164
14.40	13.1	14	23
	33.04	0.69897 - 2	3.03002
		1.14394 - 2	1.14394 - 2
			3.88608

$R_0 = 7693$ zł. (wzrost = 12600).

Zadanie.

4. XII. 36.

Jako można mieć rentę piętnastą przez 15 lat z dechn, oddając 35 780 zł. na procent składany 4 1/2 %.

1) $n = 15$ l. $R_0 = 35780$ zł. $p = 4 \frac{1}{2}\%$.

2) r .

$R_0 = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)}$

$r(q^n - 1) = R_0 q^n (q - 1)$

$r = \frac{R_0 q^n (q - 1)}{q^n - 1}$

$\log r = \log R_0 + \log(q^n) + \log(q - 1) - \log(q^n - 1)$

0.93528	4.55364
0.8.5	0.28608
0.97020 - 1	6
4	0.65321 - 2
	3.49359
80:13 = 0.61	0.97020 - 1
20	3.52265

$\log r = 3.52265$

$r = 333161$ zł.

Lekcja 31.

5. XII. 36.

1) $r = 800$ zł.

$p = 5 \frac{1}{2}\%$

$R_0 = 10086$ zł.

2) n .

$R_0 = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)}$

$q^n = \frac{r q}{r q - R_0(q - 1)}$

$r q^n - r = R_0 q^{n-1} (q - 1)$

$n \log q = \log r + \log q - \log [r q - R_0(q - 1)]$

$r q^n - q^{n-1} (q - 1) R_0 = r$

$-\log [r q - R_0(q - 1)]$

$q^{n-1} [r q - R_0(q - 1)] = r$

$n = \frac{\log r + \log q - \log [r q - R_0(q - 1)]}{\log q}$

$q^{n-1} = \frac{r q - R_0(q - 1)}{r q}$

$$\begin{array}{r} 10086.0055 \\ 50430 \\ 50430 \\ \hline 554730 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1055.800 \\ 844000 \\ 554730 \\ 289270 \\ 246120 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 290309 \\ 002325 \\ 292634 \\ 246120 \\ \hline 046504 \end{array}$$

$$46504 : 2325 = 20$$

$$n = 201$$

Lekcja 32.

9. XII. 36.

Ładzi nielkonionone

$$\frac{5}{n}$$

$$\frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{5}, \frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \frac{5}{8} \dots \dots \dots 0$$

Jeżeli wyraz ciągu nielkoniononego zolozioja do pewnej liaboy, to ciąg nielkoniononego zbierioja, a to liaboy nielkoniononego jego granico.

$$\lim \frac{5}{n} = 0$$

$$2 + \frac{1}{n}$$

$$2 + \frac{1}{1}, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{5} \dots \dots \dots 2$$

$$\lim (2 + \frac{1}{n}) = 2$$

$$n$$

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \dots \dots \dots \infty \quad \lim n = \infty$$

Granico skoniononego nielkoniononego nielkoniononego, a nielkoniononego - nielkoniononego.

$$\lim \frac{a}{n} = 0 \quad \text{Np.} \quad \lim \frac{4n+3}{2n-1} = \lim \frac{4 + \frac{3}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim \frac{a}{n^2} = 0$$

$$\lim \frac{a}{n^3} = 0$$

$$\lim n = \infty$$

$$\lim n^2 = \infty$$

$$\lim n^3 = \infty$$

Zadanie.

$$\lim (3 + \frac{2}{n}) = 3$$

$$\lim \frac{n-1}{n} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1} = 1$$

$$\lim \frac{1-n^2}{n^2} = \frac{\frac{1}{n^2} - 1}{1} = -1$$

$$\lim \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim \frac{6n-2}{2n+6} = \frac{6 - \frac{2}{n}}{2 + \frac{6}{n}} = \frac{6}{2} = 3$$

Lekcja 33.

11. XII. 36.

$$\lim \frac{5n^2 - 2n + 3}{2n^2} = \lim \frac{5 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\lim [(2 + \frac{1}{n})(3 - \frac{2}{n^2})] = 6$$

$$\lim \frac{3n+2}{n^2} = \lim \frac{\frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{2n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{2 + \frac{4}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n^3) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{1}{n} - 1 \right) = -\infty \quad (0, -1, -18, \dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n + 3) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \right) = +\infty \quad (1, 2, 3, 6, 11, \dots)$$

Zadanie.

11. XII. 36.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 - n - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \right) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{n^4 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^4}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^3-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{n^3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-5}{n^2+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{5}{n^2}} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{n^2+3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}} - \frac{1}{1+\frac{3}{n^2}} \right) = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n}{n^2+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{1+\frac{1}{n}} - \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \right) = \frac{\infty}{1} - \frac{0}{1} = \infty$$

Lekcja 34.

12. XII. 36.

Prog. postępow. arytmetyczny jest zbieżny i jako jest jego granicą.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

$$1). d > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

$$2). d < 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

$$3). d = 0$$

$$a_1, a_1, a_1, a_1, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1$$

Prog. postępow. geometryczny jest zbieżny i jako jest jego granicą.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

$$1). |q| > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$2). |q| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$3). q = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1$$

$$4). q = -1$$

$$a_1, -a_1, a_1, -a_1, \dots$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ nie istnieje.

(Prog. rozbieżny).

Nieskończone szeregi.

Szereg nieskończony nazywamy sumę wyrazów ciągu nieskończonego.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots \text{ciąg nieskończony}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots \text{szereg nieskończony}$$

Jeżeli suma n początkowych wyrazów szeregu nieskończonego zbiega do pewnej granicy skończonej, gdy n rośnie nieograniczenie,

to nereg taki nazywamy zbieżny, a to
granicę jego sumy.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

$$S_1 = 1.$$

$$S_2 = 1\frac{1}{2}$$

$$S_3 = 1\frac{3}{4}$$

$$S_4 = 1\frac{7}{8}$$

$$S_5 = 1\frac{15}{16}$$

$$S_6 = 1\frac{31}{32}$$

$$\lim S_n = 2.$$

Lekcja 35.

16. XII. 36.

Kry nereg arytmetyczny jest zbieżny.

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d].$$

$$\lim S_n = ?$$

$$1) d > 0.$$

$$\lim S_n = +\infty \text{ (nereg rozbieżny).}$$

$$2) d < 0.$$

$$\lim S_n = -\infty \text{ (nereg rozbieżny).}$$

$$3) d = 0; a_1 + a_1 + a_1 + \dots S_n = n \cdot a_1.$$

$$\lim S_n = \infty. \text{ (nereg rozb.)}$$

Kry nereg geometryczny jest zbieżny.

$$S_n = \frac{a_1(2^n - 1)}{2 - 1}.$$

$$\lim S_n = ?$$

$$1) |q| > 1.$$

$$\lim S_n = \infty. \text{ (nereg rozbieżny).}$$

$$2) |q| < 1.$$

$$\lim S_n = \frac{-a_1}{2-1} = \frac{a_1}{1-2}. \text{ (nereg zbieżny).}$$

$$3) q = 1.$$

$$a_1 + a_1 + a_1 + \dots$$

$$S_n = n \cdot a_1.$$

$$\lim S_n = \infty. \text{ (nereg rozb.)}$$

$$4) q = -1.$$

$$a_1 - a_1 + a_1 - a_1 + a_1 - \dots$$

$$S_1 = a_1; S_2 = 0; S_3 = a_1; S_4 = 0 \dots$$

$$\lim S_n \text{ nie istnieje! (nereg rozbieżny).}$$

Sereg geometryczny jest tylko wtedy zbieżny,
gdy $|q| < 1$. Wtedy posiada on sumę, na którą ma:

$$\text{my wzór } S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$1) 6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \dots$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{6}{\frac{1}{2}} = \frac{6 \cdot 2}{1} = 12.$$

$$2) 3 - 0.3 + 0.03 - 0.003 + \dots$$

$$q = -0.1$$

$$S = \frac{3}{1.1} = 2.72.$$

Zadanie.

17.XIV.36.

Zbadać czy szereg geometryczny jest zbieżny, a jeżeli tak, to obliczyć jego sumę.

$$1) 6 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \dots$$

$$q = -\frac{1}{3}$$

$$S = \frac{6}{\frac{4}{3}} = \frac{18}{4} = 4.5.$$

$$4) 3 + 0.3 + 0.03 + 0.003 + \dots$$

$$q = 0.1$$

$$S = \frac{3}{0.9} = 3.33.$$

$$c) 0.9 + 0.09 + 0.009 + \dots$$

$$q = 0.1$$

$$S = \frac{0.9}{0.9} = 1.$$

$$d) a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots$$

$$q = a; |a| < 1.$$

$$S = \frac{a}{1-a}$$

Lekcja 36.

18.XIV.36.

$$9) a_1 = -10.$$

$$S = -6$$

$$S_2) q$$

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S(1-q) = a_1$$

$$1-q = \frac{a_1}{S}$$

$$-q = \frac{a_1}{S} - 1$$

$$q = 1 - \frac{a_1}{S}$$

$$q = \frac{S - a_1}{S}$$

$$q = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$-10 + \frac{20}{3} - \frac{40}{9} + \frac{80}{27} - \dots$$

$\frac{2}{3}$ = stałek dźwiękowy, mieszkonia, okresowy. / grupa, która się powiększa: okres.

$$9) q = -\frac{2}{5}$$

$$S = 14.$$

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S(1-q) = a_1$$

$$a_1 = 14 \cdot \frac{7}{5} = \frac{98}{5} = 19.6$$

$$\frac{98}{5} - \frac{196}{25} + \frac{392}{125} - \dots$$

$$3) \frac{2}{4} = 0.285714285714 \dots$$

$$\frac{5}{8} = 0.625$$

a) Trilenie skrócone (stałek) b) " mieszkonia " " "

Zadanie.

$$1) a_1 = -18.$$

$$S = -20.$$

$$q = ?$$

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

$$S(1-q) = a_1.$$

$$1-q = \frac{a_1}{S}.$$

$$q = 1 - \frac{a_1}{S}.$$

$$q = \frac{S - a_1}{S}.$$

$$q = 0.1.$$

$$-18 - 1.8 - 0.18 - 0.018 - 0.0018 - \dots$$

$$2) q = 0.1.$$

$$S = 3.$$

$$a_1 = ?$$

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

$$a_1 = S(1-q).$$

$$a_1 = 3 \cdot 0.9 = 2.7.$$

$$2.7 + 0.27 + 0.027 + 0.0027 + \dots$$

Lekcja 37.

19.XII.36.

Zamiana miaraka skierowanego, nieskończonego, okresowego na miaraka zwykłego.

0.651 (okres mierny; 6 jest anektą.)

$$1) 0.651 = 0.651515151 \dots = 0.6 + 0.051 + 0.00051 + \dots = 0.6 + \frac{0.051}{0.99} =$$

$$q = 0.01. = 0.6 + \frac{51}{99} = \frac{6}{10} + \frac{51}{99} = \frac{594 + 51}{990} =$$

$$= \frac{129}{198} = \frac{43}{66} = 0.651.$$

$$2) 0.063 = 0.063636363 \dots = 0.0 + 0.063 +$$

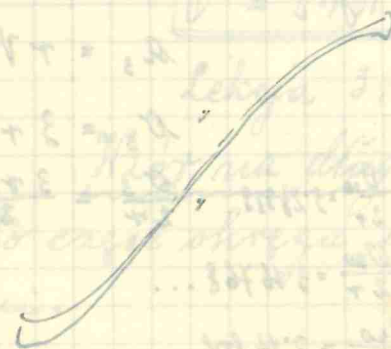
$$+ 0.00063 + 0.0000063 + \dots = \frac{0.063}{0.99} = \frac{63}{990} = \frac{7}{110}.$$

$$7 : 110 = 0.0636363 \dots = 0.063.$$

$$3) 0.83 = 0.83333 \dots = 0.8 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \dots = 0.8 + \frac{0.03}{0.9} = \frac{8}{10} + \frac{3}{90} = \frac{72 + 3}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6} = 0.8333$$

Lekcja 38.

13.I.37.



Geometria.

Koło.

- Lekcja 1. -

13.I.37.

Obliczanie obwodu koła.

Nowodem jest długość okręgu.

1. Koło może być uważane za wielobok foremny o nieskończonej ilości boków.
2. Obwód koła jest granicą, do której zbiegają obwody wieloboków foremnych w koło wpisanych i na kole opisywanych, gdy liczba boków rośnie nieograniczenie.

$$\lim o_n = 0 = \lim O_n$$

$$o_n < 0 < O_n$$

Lekcja 2.

15.I.37.

$$o_n < 0 < O_n$$

$$\frac{o_n}{2r} < \frac{0}{2r} < \frac{O_n}{2r}$$

$$\frac{o_{16}}{2r} = 3.09017... < \frac{0}{2r} < \frac{O_{16}}{2r} = 3.21119...$$

$$\frac{o_{20}}{2r} = 3.12868... < \frac{0}{2r} < \frac{O_{20}}{2r} = 3.16768...$$

$$\frac{o_{40}}{2r} = 3.13836... < \frac{0}{2r} < \frac{O_{40}}{2r} = 3.14806...$$

$$\frac{o_{100}}{2r} = 3.14078... < \frac{0}{2r} < \frac{O_{100}}{2r} = 3.14320...$$

$$a_3 = r\sqrt{3}$$

$$O_3 = 3r\sqrt{3}$$

$$\frac{O_3}{2r} = \frac{3r\sqrt{3}}{2r} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

1) Stosunek obwodu koła do średnicy tego koła jest liczbą stałą (niezależną od promienia tego koła).

2) Stosunku tego dokładniej wyznaczyć nie potrafimy, lecz możemy podać granice, między którymi on się znajduje i granice te do siebie do siebie przybliżać; (stosunek ten jest liczbą niewymierną), (stosunek ten jest liczbą) przestępną.

3) Jako wartość tego stosunku bierzemy liczbę utworzoną z cyfr obu granicami wspólnych.

4) Stosunek ten nazywamy 'ludolfiną' i oznaczamy go grecką literą π (≈ 3.14159).

$$\frac{O}{2r} = \pi$$

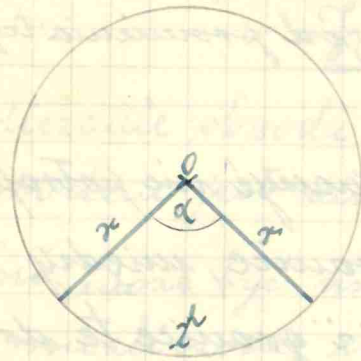
$$O = 2r\pi$$

Lekcja 3.

16.I.37.

Wzór na długość łuku.

Łuk jest to część okręgu ograniczona dwoma punktami.



$$\begin{aligned} y &= ax \\ y_1 &= ax_1 \\ y_2 &= ax_2 \\ \frac{y_1}{y_2} &= \frac{x_1}{x_2} \end{aligned}$$

Łuk jest do kąta środkowego wprost proporcjonalny.

$$l : 2r\pi = \alpha : 360^\circ$$

$$l = \frac{2r\pi\alpha}{360^\circ}$$

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$$

Pole koła

$$\lim p_n = Q = \lim P_n$$

$$P_n = n \cdot A_n \cdot \frac{\pi}{2} = O_n \cdot \frac{\pi}{2}$$

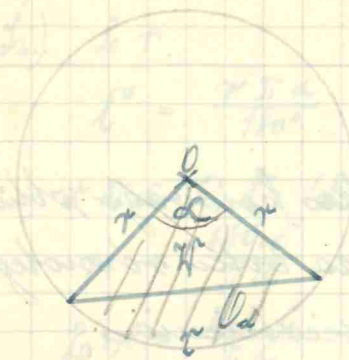
$$Q = \lim O_n \cdot \frac{\pi}{2} = O \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$Q = O \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$Q = 2r\pi \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$Q = r^2\pi$$

Pole wycinka koła



$$W : r^2\pi = \alpha : 360^\circ$$

$$W = \frac{r^2\pi\alpha}{360^\circ}$$

$$W = \frac{r^2\pi\alpha}{180^\circ} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$W = l \cdot \frac{r}{2}$$

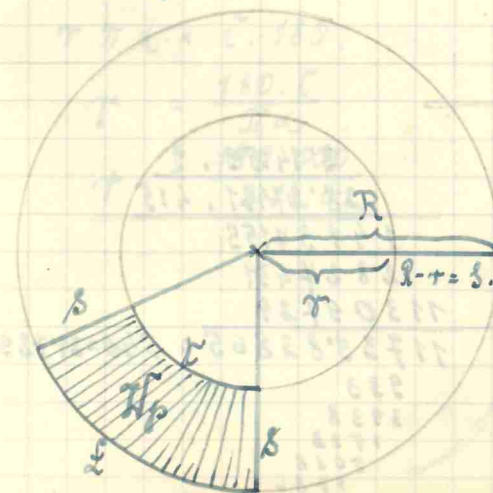
Pole wycinka koła oblicza się tak jak pole trójkąta, którego podstawą jest łuk, a wysokością promień koła.

$$Od = W - Tr$$

Lekcja 4.

20. I. 37.

1. Pole pierścienia kołowego



$$R - r = s$$

$$P_p = R^2\pi - r^2\pi$$

$$P_p = \pi(R^2 - r^2)$$

$$P_p = \pi(R + r)(R - r)$$

$$W_p = \frac{R^2\pi\alpha}{360^\circ} - \frac{r^2\pi\alpha}{360^\circ}$$

$$W_p = \frac{\pi\alpha}{360^\circ}(R + r)(R - r)$$

$$W_p = \frac{\pi a}{180} \cdot \frac{1}{2} (R + r) \cdot \delta.$$

$$W_p = \left(\frac{R \pi a}{180} + \frac{r \pi a}{180} \right) \cdot \frac{\delta}{2}.$$

$$W_p = \left(L + l \right) \cdot \frac{\delta}{2}$$

Pole wyinka pierścienia wyznacza kołowego oblicza się tak jak pole trapezu, biorąc za boki równoległe L i l , a za wysokość szerokość pierścienia.

$$L r' \pi = L r \pi + l.$$

$$r' = r + \frac{l}{2\pi}.$$

$$r' - r = \frac{l}{2\pi}.$$

$$R' - R = \frac{l}{2\pi}.$$

Ładanie.

21. I. 37.

1) $r = 9 \text{ cm.}$ $\alpha = 138^\circ 20'.$

2) $l.$

$$l = \frac{r \pi \alpha}{180}.$$

$$l = \frac{9 \text{ cm.} \cdot 3.14159 \cdot 415}{180 \cdot 3}.$$

$$l = 21.72933 \text{ cm.}$$

$$\begin{array}{r} 3.14159 \cdot 9 \\ 28.27431 \cdot 415 \\ 14137155 \\ 2827431 \\ 11309734 \\ 1173383865 : 540 = 21.72933 \end{array}$$

1) $\alpha = 1'.$ $l = 1 \text{ km.}$

2) $L r.$

$$l = \frac{r \pi \alpha}{180}.$$

$$r \pi \alpha = l \cdot 180.$$

$$r = \frac{l \cdot 180}{\pi \alpha}.$$

$$L r = \frac{l \cdot 180}{\pi \alpha}.$$

$$L r = \frac{360000}{3.14 \cdot 20} = \frac{360000 \cdot 30}{1.57} = 6878980 \text{ m.}$$

$$= 6878.980 \text{ km.}$$

Lekeja 5.

22. I. 37.

1) $l = 1 \text{ m.}$ $\alpha = 0.1^\circ.$

2) $r.$

$$l = \frac{r \pi \alpha}{180}.$$

$$r \pi \alpha = l \cdot 180.$$

$$r = \frac{l \cdot 180}{\pi \alpha}.$$

$$r = \frac{180 \cdot 100}{3.14 \cdot 0.1}.$$

$$\begin{array}{r} 18000 : 0.314 = \\ 18000.000 : 314 = 573.2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2300 \\ 1020 \\ = 780 \end{array}$$

$$r = 573.2 \text{ m.}$$



Zadanie.

22.I.37.

1. 2.) $S = 1 \text{ km}^2$. Sz.) r .

$$S = r^2 \pi$$

$$100000000 : 314 = 318471. \mu^2$$

$$r^2 = \frac{S}{\pi}$$

$$580$$

$$2660$$

$$1480$$

$$2240$$

$$430$$

$$\sqrt{318471} \mu = 564.33 \mu$$

$$684 : 106.6$$

$$4871 : 1124.4$$

$$37500 : 11283.3$$

$$365100 : 11286$$

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

$$r = \sqrt{\frac{100000000}{3.14}}$$

$$r = 564.33 \mu$$

2. 2.) $r = 3.8 \mu$. $\alpha = 22^\circ 30'$. Sz.) S .

$$S = L \cdot \frac{r}{2}$$

$$3.14 \cdot 3.8 \mu$$

$$L = \frac{r \alpha \pi}{180^\circ}$$

$$S = 2.831 \mu^2$$

$$2512$$

$$942$$

$$11932 \mu \cdot 45$$

$$59660$$

$$47728$$

$$536940 \mu : 360 = 1.49 \mu \cdot 1.9 \mu$$

$$1769$$

$$1341$$

$$3294$$

$$2.831 \mu^2$$

3. 2.) $r = 2 \text{ dm}$. $S = 1 \text{ dm}^2$. Sz.) α ; L .

$$S = L \cdot \frac{r}{2}$$

$$3.14 \cdot 4 \text{ dm}$$

$$12.56 \text{ dm}$$

$$360.00 \text{ dm} : 12.56 \text{ dm} = 28.662$$

$$S = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ}$$

$$10880$$

$$8320$$

$$7840$$

$$3040$$

$$r^2 \pi \alpha = 360 \cdot S$$

$$\alpha = 28.662$$

$$\alpha = \frac{360 \cdot S}{r^2 \pi}$$

$$S = \frac{L \cdot r}{2}$$

$$L \cdot r = S \cdot 2$$

$$L = \frac{S \cdot 2}{r} = \frac{2 \text{ dm}^2}{2 \text{ dm}} = 1 \text{ dm}$$

Lekcja 6.

23.I.37.

2.) $\alpha = 60^\circ$. $r = 18 \mu$. Sz.) Od .

$$Od = S - S_r$$

$$S = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ} = \frac{r^2 \pi 60^\circ}{360^\circ} = \frac{r^2 \pi}{6}$$

$$S_r = \frac{r^2 \pi}{4} = \frac{r^2 \pi}{4}$$

$$Od = \frac{r^2 \pi}{6} - \frac{r^2 \pi}{4}$$

$$Od = \frac{3r^2 \pi - 3r^2 \pi}{12}$$

$$Od = \frac{r^2 (3\pi - 3\pi)}{12} = \frac{324 (6.28 - 5.19)}{12} = 29.43 \mu^2$$

$$18^2 =$$

$$1^2 = 1$$

$$2 \cdot 1 \cdot 8 = 16$$

$$8^2 = 64$$

$$1.43.3$$

$$5.19$$

$$324.109$$

$$2916$$

$$35316.11.29$$

$$113$$

$$51$$

$$36$$

Zadanie.

26.I.37.

1. 2.) $r = 18 \mu$. $\alpha = 90^\circ$. Sz.) Od .

$$Od = S - S_r$$

$$S = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ} = \frac{r^2 \pi 90^\circ}{360^\circ} = \frac{r^2 \pi}{4}$$

$$S_r = r^2 \pi \cdot \frac{r^2 \pi}{4} = \frac{2r^2}{4} (= \frac{r^2}{2})$$

$$Od = \frac{r^2 \pi}{4} - \frac{r^2}{2}$$

$$Od = \frac{r^2 \pi - 2r^2}{4} = \frac{r^2 (\pi - 2)}{4} = \frac{324 \mu^2 \cdot 1.14}{4} = 92.34 \mu^2$$

$$18 = r^2 \pi$$

$$\frac{L}{2} = \frac{r^2 \pi}{2} = \frac{2r^2}{4}$$

$$S_r = r^2 \pi - \frac{2r^2}{4}$$

$$S_r = 4r^2 - \frac{2r^2}{4}$$

$$S_r = 4r^2 - \frac{2r^2}{4}$$

$$S_r = 4r^2 - \frac{2r^2}{4}$$

$$S_r = 4r^2 - \frac{2r^2}{4}$$

$$S_r = 4r^2 - \frac{2r^2}{4}$$

$$S_r = 4r^2 - \frac{2r^2}{4}$$

$$S_r = 4r^2 - \frac{2r^2}{4}$$

$$S_r = 4r^2 - \frac{2r^2}{4}$$

2. 1) $R = 6 \text{ cm}$, $r = 4 \text{ cm}$, $\alpha = 35^\circ 15'$, $2.) V_p$.

$$V_p = (L + l) \cdot \frac{1}{2}$$

$$V_p = (3.689 \text{ cm} + 2.459 \text{ cm}) \cdot \frac{1}{2}$$

$$V_p = 3.074 \text{ cm}$$

$$L = \frac{R \pi \alpha}{180^\circ}$$

$$L = \frac{6 \cdot \pi \cdot 35.25}{180}$$

$$L = 3.689 \text{ cm}$$

$$l = \frac{r \pi \alpha}{180^\circ}$$

$$l = \frac{4 \cdot \pi \cdot 35.25}{180}$$

$$l = 2.459 \text{ cm}$$

$$3.689 \text{ cm} \cdot 2.459 \text{ cm}$$

$$9.071251 \text{ cm}^2 \cdot 1 \text{ cm} = 9.071251 \text{ cm}^3$$

$$V_p = 9.071251 \text{ cm}^3$$

$$V_p = 6.148 \text{ cm}^3$$

Lekcja 7.

Narozie.

Figura utworzona przez połączenie trzech płaszczyzn przecinających się w jednym punkcie, nazywa się narozem, albo kątem bryłowym.

Suma kątów płaskich w każdym narozie musi być mniejsza od 360° .

Obliczanie pola powierzchni

oraz objętości brył.

Część przestrzeni ograniczoną powierzchniami nazywamy bryłą. Te powierzchnie nazywają się ścianami bryły. Powierzchnię utworzoną ze ścian bryły nazywamy powierzchnią bryły.

Sumę (pół)ścian bryły nazywamy polem powierzchni bryły.

Liczbę wyrażającą ile jednostek objętości mieści się w bryle, nazywamy jej objętością.

Bryły dzielimy na I. bryły graniaste (wielosłupy) t.j. takie, których wszystkie ściany są płaskie, II. bryły okrągłe, których choćby jedna ściana jest krzywa.

Bryły graniaste dzielą się na 1. graniastosłupy, 2. stożki, 3. wielosłupy umiarkowane.

Bryły okrągłe dzielą się na 1. walce, 2. stożki, 3. bryły obrotowe.

Graniastosłup.

Graniastosłup jest to bryła graniasta, ograniczona dwoma wielobokami do siebie równoległymi i przystającymi (podstawy, dno) i tyłoma równoległobokami (ściany boczne) ile boków ma podstawa.

Krawędzie boczne i przypodstawne.

Odcinek poprowadzony z dowolnego punktu podstawy górnej prostopadłe do dolnej nazywa się wysokością graniastosłupa.

c.d.

Lekcja 8.

29. I. 37.

Odcinek łączący dwa wierzchołki należące do tej samej ściany nazywa się przekątną graniastosłupa.

Powierzchnię utworzoną ze wszystkich ścian bocznych nazywamy powierzchnią boczną graniastosłupa.

Graniastosłup bierze nazwę od podstawy n.p. trójkątny ... i t.d., albo od ilości ścian bocznych

n.p. trójsieczny, czworosieczny ... i t.d.

Graniastosłup, którego krawędzie boczne są do podstawy prostopadłe nazywa się prostym, w przeciwnym razie pochylony.

Graniastosłup prosty mający za podstawę wielokąt foremny nazywa się foremnym.

Graniastosłup mający za podstawę równoległobok nazywa się równoległoscianem.

Graniastosłup prosty mający za podstawę prostokąt nazywa się prostopadłoscianem. (Trzy różne krawędzie.)

Graniastosłup prosty mający za podstawę kwadrat nazywa się prostopadłoscianem kwadratowym.

Graniastosłup prosty o podstawie kwadratowej, mający krawędzie boczne równe przy podstawie nazywa się sześciścianem. Należy on do wielościanów foremnych (sumiar.).

P - pole powierzchni graniastosłupa
 B - " podstawy
 M - " bocznicy

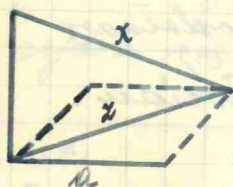
$$P = 2B + M.$$

$$P_m = 6a^2.$$

Zadanie.

29. I. 37.

Obliczyć przekątną 1) sześcienną o krawędzi a,
 2) prostopadłościanu o krawędziach a, b, c.



$$x^2 = 2a^2.$$

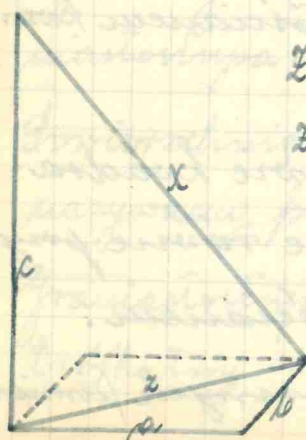
$$x = a\sqrt{2}.$$

$$x^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2.$$

$$x^2 = a^2 + 2a^2.$$

$$x^2 = 3a^2.$$

$$x = a\sqrt{3}.$$



$$x^2 = a^2 + b^2.$$

$$z = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$x^2 = c^2 + (a^2 + b^2).$$

$$x^2 = c^2 + a^2 + b^2.$$

$$x = \sqrt{c^2 + a^2 + b^2}.$$

Lekcja 9.

30. I. 37.

Wzór na objętość graniastosłupa.

Wz. = 20 cm, szer. = 10 cm, wys. = 30 cm.

$$V = 20 \cdot 10 \cdot 30 \text{ cm}^3.$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$\rightarrow$ objętość prostopadłościanu.

$$V_m = a^3.$$

$$V_{pr} = B \cdot h$$

$$V_{gr} = \frac{B_{pr} \cdot h_{pr}}{3}$$

$$V_{gr} = B \cdot h$$

$$V = b_1 h + b_2 h + b_3 h + \dots + b_{n-2} h.$$

$$V = (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-2}) \cdot h.$$

$$V = B \cdot h.$$

1) $a = 30.5 \text{ dm}$

2) $V_2 = ?$

$$P_2 = 2P_1.$$

$$V_2 = x^3.$$

$$6x^2 = 12a^2.$$

$$x^2 = 2a^2.$$

$$x = a\sqrt{2}.$$

$$V = (a\sqrt{2})^3$$

$$V = 2a^3\sqrt{2}.$$

$$V = 24122.35 \text{ dm}^3.$$

$$\begin{array}{r} 20.5 \cdot 20.5 \\ 1025 \\ 410 \\ 420.25 \cdot 20.5 \\ 210125 \\ 84050 \\ 8615125 \cdot 2 \\ 17230250 \cdot 2 \\ 34460500 \end{array}$$

Zadanie.

2. II. 37.

1) Sześcian, którego krawędź $a = 2 \text{ dm}$ waży $C = 16 \text{ kg}$.
Obliczyć ciężar sześcianu o krawędzi $b = 5.4 \text{ dm}$
zrobionego z tego samego materiału.

$$\begin{aligned} a : C &= b : X \\ aX &= Cb \\ X &= \frac{Cb}{a} \end{aligned} \quad \begin{aligned} X &= \frac{16 \text{ kg} \cdot 5.4 \text{ dm}}{2 \text{ dm}} \\ X &= 43.2 \text{ kg} \end{aligned} \quad \frac{54 \cdot 8}{432}$$

2) Przekątna sześcianu o krawędzi $a = 10 \text{ cm}$ jest krawędzią drugiego sześcianu. Obliczyć powierzchnię i objętość tego drugiego sześcianu.

$$X = a\sqrt{3}$$

$$P_n = 6a^2$$

$$P_n = 6X^2 = 6(a\sqrt{3})^2$$

$$P_n = 6 \cdot 3a^2 = 18a^2$$

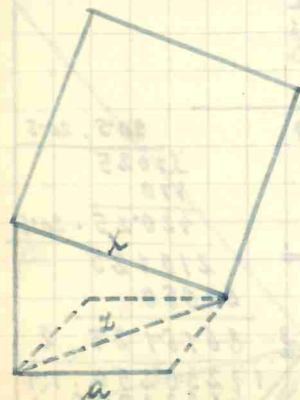
$$P_n = 1800 \text{ cm}^2 = 18 \text{ dm}^2$$

$$V_n = a^3$$

$$V_n = X^3 = 3a^2 \cdot a\sqrt{3} = 3a^3\sqrt{3}$$

$$V_n = 5196 \text{ cm}^3$$

$$\frac{1732 \cdot 3000 \text{ cm}^3}{5196 \text{ cm}^3}$$



Lekcja 10.

3. II. 37.

a) 1) $a = 2 \text{ dm}$. $C = 16 \text{ kg}$. $b = 5.4 \text{ dm}$.

2) $C_1 = ?$ ($C_2 = ?$)

$$V_1 = a^3$$

$$C_1 = \frac{C}{a^3}$$

$$C_2 = \frac{b^3 \cdot C}{a^3}$$

$$C_2 = 314.928 \text{ kg}$$

1) 1) $a_1 = X_1$. X_2 . $V_3 = X_1^3 + X_2^3$

$$V_3 = V_1 + V_2$$

2) $P_3 = ?$

$$P = 6a^2$$

$$P_3 = 6a^2$$

$$a^3 = X_1^3 + X_2^3$$

$$a = \sqrt[3]{X_1^3 + X_2^3}$$

$$P_3 = 6 \sqrt[3]{(X_1^3 + X_2^3)^2}$$

$$\frac{512}{1728} = 484$$

$$2240^2 = 484$$

$$\frac{176}{5017600}$$

$$P_3 = 6 \sqrt[3]{5017600}$$

$$\frac{2}{X-10} + 10 - X = \frac{2}{10-X}$$

$$2 + (10-X)(X-10) = -2$$

$$2 + 10X - X^2 - 100 + 10X + 2 = 0$$

$$4 + 20X - X^2 - 96 = 0$$

$$X^2 - 20X + 96 = 0$$

$$X_1 = \frac{20 + \sqrt{400 - 384}}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$X_2 = \frac{16}{2} = 8$$

$$X = \sqrt[3]{5.017.600}$$

$$\log X = \frac{\log 5.017.600}{3}$$

$$\log X = 2.2335$$

$$X = 171.2$$

$$* P_2 = 1027.2 \text{ j}^2$$

Zadanie.

4. II. 37.

Objętość meściaun z drewna jodłowego ($C_v. 0.7$) wynosi 2 m^3 . Ile kg ołowiu ($C_v. 11.4$) trzeba przytwierdzić do dolnej podstawy tego meściaun, aby nż meściaun całkowicie w wodzie zamoczył.

$$C = V_1 \cdot C_{v1} + X$$

$$C = (V_1 + \frac{X}{C_{v2}}) 1$$

$$V_1 \cdot C_{v1} + X = V_1 + \frac{X}{C_{v2}}$$

$$V_1 \cdot C_{v1} \cdot C_{v2} + X \cdot C_{v2} = V_1 \cdot C_{v2} + X$$

$$X C_{v2} - X = V_1 \cdot C_{v2} - V_1 \cdot C_{v1} \cdot C_{v2}$$

$$X(C_{v2} - 1) = V_1 \cdot C_{v2} - V_1 \cdot C_{v1} \cdot C_{v2}$$

$$X = \frac{V_1 \cdot C_{v2} - V_1 \cdot C_{v1} \cdot C_{v2}}{C_{v2} - 1}$$

$$X = \frac{2000 \text{ dm}^3 \cdot 11.4 \text{ kg} - 2000 \text{ dm}^3 \cdot 0.7 \text{ kg} \cdot 11.4 \text{ kg}}{11.4 \text{ kg} - 1} = \frac{\text{dm}^3 \cdot \text{kg}}{\text{dm}^3}$$

$$\begin{array}{r} 6.70044 \\ 5 \\ \hline 6.70049 : 3 = 2.2335 \\ = 7 \\ 10 \\ 10 \\ 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.6.9 \\ 5.4 \\ \hline \end{array}$$

$$171.2.6$$

$$\begin{array}{r} 2000 \cdot 11.4 \\ 22800 \\ 15360 \\ \hline 68400 : 104 = 657.7 \\ 600 \\ 800 \\ 720 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1400 \cdot 11.4 \\ 5600 \\ 1400 \\ \hline 15960 \end{array}$$

$$X = 657.7 \text{ kg.}$$

Lekcja 11.

5. II. 36.

$$1.) a = 5.2 \text{ dm.}$$

$$P = 64.08 \text{ dm}^2$$

$$2.) V = ?$$

$$V = a^2 \cdot c$$

$$P = 2B + M$$

$$B = a^2$$

$$M = 4ac$$

$$P = 2a^2 + 4ac$$

$$4ac = P - 2a^2$$

$$c = \frac{P - 2a^2}{4a}$$

$$V = a^2 \cdot \frac{P - 2a^2}{4a}$$

$$V = \frac{a^2(P - 2a^2)}{4a}$$

$$V = \frac{a(P - 2a^2)}{4}$$

$$V = \frac{5.2 \text{ dm} (64.08 \text{ dm}^2 - 2 \cdot 5.2 \text{ dm}^2)}{4}$$

$$\frac{64.08 \text{ dm}^2}{54.08 \text{ dm}^2}$$

$$\frac{10.00 \text{ dm}^2}{10 \text{ dm}^2 \cdot 5.2 \text{ dm}}$$

$$\frac{5.2 \text{ dm}^2}{5.2 \text{ dm}^2 : 4 = 1.3 \text{ dm}^2}$$

$$V = 1.3 \text{ dm}^3$$

$$\frac{5.2 \text{ dm}^2}{25}$$

$$\frac{204}{2404 \text{ dm}^2}$$

$$g.) \quad h = 8.5 \text{ cm.} \quad V = 1224 \text{ cm}^3$$

$$L.) \quad P = ?$$

$$P = 2B + M$$

$$B = a^2$$

$$M = 4ah$$

$$P = 2a^2 + 4ah$$

$$V = a^2 h$$

$$a^2 = \frac{V}{h}$$

$$a = \sqrt{\frac{V}{h}}$$

$$P = \frac{2V}{h} + 4h\sqrt{\frac{V}{h}}$$

$$P = 2 \cdot \frac{V}{h} + 4\sqrt{Vh}$$

$$P = 2\left(\frac{V}{h} + 2\sqrt{Vh}\right)$$

$$1224 \text{ cm}^3 : 8.5 \text{ cm} = 144 \text{ cm}^2$$

$$\begin{array}{r} 374 \\ 340 \overline{) 1224} \\ \underline{44} \end{array}$$

$$\sqrt{10404} \text{ cm} = 102 \text{ cm}$$

$$\begin{array}{r} 04 : 2 \\ 08404 : 202.2 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$P = 696 \text{ cm}^2$$

Zadanie.

5. II. 37.

Krawędzie prostopadłościennego, którego powierzchnia $P = 454 \text{ dm}^2$, różnią się o dany dm. Obliczyć te krawędzie.

$$2a(a+4) + 2a(a+8) + 2(a+4)(a+8) = P$$

$$2a^2 + 8a + 2a^2 + 16a + 2a^2 + 8a + 16a + 32 = P$$

$$6a^2 + 48a + 64 = 454$$

$$6a^2 + 48a - 390 = 0$$

$$2a^2 + 16a - 130 = 0$$

$$a = \frac{-16 + \sqrt{256 + 1040}}{2}$$

$$a = 5 \text{ dm}$$

$$b = 9 \text{ dm}$$

$$c = 13 \text{ dm}$$

$$\sqrt{1296} = 36$$

$$396 : 66.6$$

Lekcja 16.

6. II. 37.

$$g = 2P + M$$

$$g = 2ab + 2ac + 2bc$$

$$P = a \cdot b$$

$$M = 2ac + 2bc$$

$$g = 2ab + 2ac + 2bc$$

$$1) \quad g.) \quad a = 7 \text{ m}, \quad b = 11 \text{ m}, \quad c = 13 \text{ m}$$

$$L.) \quad \text{O ile powiększ. kraw. by } g = x + 426 \text{ m}^2$$

$$2ab + 2ac + 2bc + 213 = 2(a+x)(b+x) + 2(a+x)(c+x) + 2(b+x)(c+x) +$$

$$ab + ac + bc + 213 = ab + xb + ax + x^2 + ac + xc + ax + x^2 +$$

$$bc + xc + bx + x^2$$

$$3x^2 + 2bx + 2ax + 2cx = 213$$

$$3x^2 + 22x + 14x + 26x = 213$$

$$3x^2 + 62x - 213 = 0$$

$$x = \frac{-62 + \sqrt{3844 + 3556}}{6}$$

$$x = \frac{18}{6} = 3$$

$$62 \cdot 36$$

$$244$$

$$3844$$

$$213 \cdot 12$$

$$126$$

$$3556$$

$$3844$$

$$\sqrt{6400} = 80$$

$$2) \text{ 1.) } h = 2.4 \text{ dm}, \quad a = 0.5 \text{ dm}, \quad c = 1.3 \text{ dm}.$$

$$2.) \quad P = ? \quad V = ?$$

$$P = 2P_1 + M.$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

$$B = \frac{a\sqrt{c^2 - a^2}}{2}.$$

$$M = ah + ch + bh.$$

$$M = ah + ch + h\sqrt{c^2 - a^2}.$$

$$P = a\sqrt{c^2 - a^2} + ah + ch + h\sqrt{c^2 - a^2}.$$

$$P = a\sqrt{c^2 - a^2} + h\sqrt{c^2 - a^2} + h(a + c).$$

$$P = \sqrt{c^2 - a^2}(a + h) + h(a + c).$$

$$P = 7.8 \text{ dm}^2 = 700 \text{ mm}^2 + 80 \text{ mm}^2 = 780 \text{ mm}^2.$$

$$V = B \cdot h.$$

$$V = \frac{h \cdot a \sqrt{c^2 - a^2}}{2}.$$

$$V = \frac{a \cdot h}{2} \sqrt{c^2 - a^2}.$$

$$V = 0.72 \text{ dm}^3.$$

$$V = 720 \text{ mm}^3.$$

$$\begin{array}{r} 2.4 \text{ dm} \cdot 1.8 \text{ dm} \\ 192 \\ \hline 4.32 \text{ dm}^2 \end{array}$$

$$2.9 \text{ dm} \cdot 1.2 \text{ dm} =$$

$$3.48 \text{ dm}^2.$$

$$4.32 \text{ dm}^2$$

$$7.80 \text{ dm}^2.$$

$$\begin{array}{r} 2.4 \text{ dm} \cdot 0.6 \text{ dm} \\ 1.44 \text{ dm}^2 : 2 = \\ \hline 0.72 \text{ dm}^2 \end{array}$$

$$V = 720 \text{ mm}^3.$$

Zadanie.

10. II. 37.

Podstawa graniastopu prostego jest trójkąt równoboczny wpisany w koło o promieniu $r = 2 \text{ m}$, a wysokością bok kwadratu opisanego na tym samym kole. Obliczyć powierzchnię i objętość tego graniastopu.

$$P = 2P_1 + M.$$

$$a = r\sqrt{3}.$$

$$w = \frac{3r}{2}.$$

$$P_1 = r\sqrt{3} \cdot \frac{3r}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$h = 2r.$$

$$M = 3(r\sqrt{3} \cdot 2r) = 6r^2\sqrt{3}.$$

$$P = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2} + 6r^2\sqrt{3} = \frac{3r^2\sqrt{3} + 12r^2\sqrt{3}}{2} = \frac{15r^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$P = 7.5r^2\sqrt{3}.$$

$$P = 51.9 \text{ m}^2.$$

$$V = P_1 \cdot h.$$

$$V = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2r.$$

$$V = \frac{6r^3\sqrt{3}}{4}.$$

$$V = \frac{3r^3\sqrt{3}}{2}.$$

$$8 \text{ m}^3 \cdot 3 = 24 \text{ m}^3.$$

$$1.73 \cdot 24 \text{ m}^3$$

$$69.2$$

$$\frac{346}{41.52 \text{ m}^3 : 2} = 20.76 \text{ m}^3.$$

$$V = 20.7 \text{ m}^3.$$

Lekcja 13.

12. II. 37.

$$1) \quad 9.) \quad r = 6 \text{ dm.} \quad Q = 432 \text{ dm}^2$$

$$2.) \quad h = ?$$

$$Q = 2P + M$$

$$P = 6 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = \frac{3a^2}{2} \sqrt{3}$$

$$M = 6ah$$

$$Q = 3a^2 \sqrt{3} + 6ah$$

$$3a^2 \sqrt{3} + 6ah = 432$$

$$6ah = 432 - 3a^2 \sqrt{3}$$

$$h = \frac{432 - 3a^2 \sqrt{3}}{6a}$$

$$h = \frac{144 - a^2 \sqrt{3}}{2a} = 6.81 \text{ dm.}$$

$$\begin{array}{r} 36.3 \\ 108 \text{ dm}^2 \cdot 1.73 \\ 173 \cdot 108 \\ 1384 \\ 186.84 \text{ dm}^2 \\ 432 \text{ dm}^2 \\ 186.84 \text{ dm}^2 \\ 245.16 \text{ dm}^2 : 36 \text{ dm} \\ 245.16 : 36 = 6.81 \text{ dm.} \\ 291 \\ = 36 \end{array}$$

Zadanie.

12. II. 37.

Naczynie w kształcie graniastosłupa, którego podstawa jest sześciokąt regularny oparty na kole o promieniu $r = 25 \text{ mm}$, wypełniono cieczą do wysokości $h = 20 \text{ mm}$. Jak wielki nacisk wywiera ciecz na dno tego naczynia?

$$C = V \cdot \rho$$

$$V = P \cdot h$$

$$P = 6 \cdot \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3r^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{3r^2 \sqrt{3}}{2} \cdot h$$

$$C = 2r^2 \cdot h \cdot \rho \cdot \sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r} (0.25 \text{ dm})^2 = 0.0625 \text{ dm}^2 \cdot 2 \\ 4 \\ 0.125 \text{ dm}^2 \cdot 2 \text{ dm} \\ 20 \\ 0.25 \text{ dm}^2 \cdot 13.6 \text{ dm}^3/\text{kg} \\ 25 \\ 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 372 \\ 3400 \text{ kg} \cdot 1.73 \\ 102 \\ 238 \\ 34 \\ 5.88 \text{ kg.} \end{array}$$

$$C = 5.88 \text{ kg.}$$

Lekcja 14.

13. II. 37.

$$1) \quad V = 150 \text{ m}^3 \quad P_1 = 15 \text{ m}^2 \quad P_2 = 30 \text{ m}^2$$

$$2.) \quad d_1, d_2, h = ?$$

$$\frac{d_1 \cdot d_2 \cdot h}{2} = 150$$

$$\frac{d_1 \cdot h}{2} = 15$$

$$d_2 \cdot h = 30$$

$$d_1 \cdot d_2 \cdot h = 300$$

$$h = \frac{15}{d_1}$$

$$d_1 \cdot d_2 \cdot \frac{15}{d_1} = 300$$

$$d_2 = \frac{300}{15}$$

$$d_2 = 20$$

$$20h = 30$$

$$h = 1.5$$

$$d_1 \cdot 1.5 = 15$$

$$d_1 = 10$$

2.) $1:2:3 = a:b:c$
 $\sum_{i=1}^3 1 \quad 3 = v + 426 \mu^3$

h.) a, b, c .

$$v_2 = v_1 + 426$$

(Prędkość bieżąca).

$$a:b = 1:2$$

$$a : c = 1 : 3$$

$$(a+2)(b+1)(c+3) = a \cdot b \cdot c + 426.$$

$$a:b = 1:2$$

$$a:c = 1:3$$

$$(ab + 2b + a + 2) \cdot bc(c + 3) = a \cdot b \cdot c + 42b$$

$$abc + 2bc + ac + 2c + 3ab + 3a + 6b + 6 =$$

$$= \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c} + 426$$

$$2bc + ac + 3c + 3ab + 3a + 6b \neq -420 = 0$$

$$b = 2a$$

$$L = 30$$

$$6a^2 + 3a + 3a^2 + 12a^2 + 12a + 6a - 420 = 0$$

$$21a^2 + 21a - 420 = 0$$

$$x^2 + a - 20 = 0$$

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{2}$$

$\sqrt{A} = 9$

$$\underline{a_1 = -5} \quad \underline{a_2 = 4} \quad \underline{b = 8} \quad c = 12$$

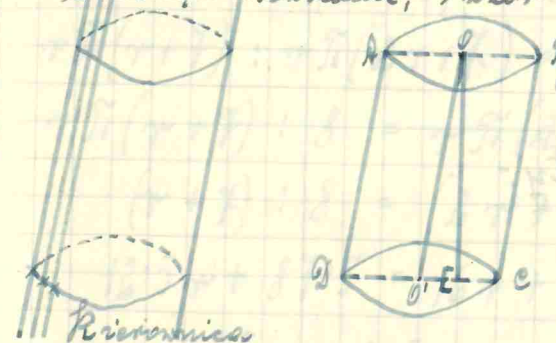
Lekcja 15.

Walec

17. II. 37.

Walec jest to bryła okrągła, ograniczona dwoma kołami do siebie równoległymi i przystającymi (podstawy) i jedną powierzchnią bryły, t. zw. powierzchnią walcową (pobocznica).

tyfomacja - powstanie, - rozwój choroby.



00'-is walca.

AG, PC - bok walca.

OE - wysokość walca.

Powierzchnia walcowa powstaje przez ruch linii prostej. Jest to powierzchnia "rozwijalna".

Prekroje

Przekrój podłużny.

glikozj přechyza přechodící přes os a pro:

Prostopadła do podstawy narywa się przekrojem pionowym.

Walec, którego oś jest do podstawy prostopadła narywa się prostym; w przekroju widać pochyły.

Walec prosty, w którym bok jest równy średnicy podstawy narywa się równobocznym.

$$Q = Lp + M$$

$$p = r^2 \pi$$

Zauważ: - walec prosty:

$$M = 2r\pi \cdot h$$

$$Q = 2r^2\pi + 2r\pi h$$

$$Q = 2r\pi(r + h)$$

$$V = p \cdot h$$

$$V = r^2\pi h$$

$$h = 2r$$

$$Q = 6r^2\pi$$

$$h = 2r$$

$$V = 2r^3\pi$$

Zadanie.

18. II. 37.

Wysokość walca prostego jest o 7 dm większa od promienia jego podstawy, pole powierzchni bocznej tego walca tworzy z jego powierzchnią bazy taki stosunek jak 16 : 25. Obliczyć promień tego walca.

$$h = r + 7$$

$$2r\pi h : 2r\pi(r + h) = 16 : 25$$

$$r\pi h : 2r\pi(r + h) = 8 : 25$$

$$r\pi(r + 7) : r\pi(2r + 7) = 8 : 25$$

$$r\pi(r + 7) : 8 = r\pi(2r + 7) : 25$$

$$(r + 7) : 8 = (2r + 7) : 25$$

$$25r + 175 = 16r + 56$$

$$9r = -119$$

$$r = \frac{-119}{9} = -13.22$$

$$r = 9 \text{ dm}$$

Odpowiedź:

Promień podstawy tego walca wynosi 9 dm.

Lekcja 16.

19. II. 37.

1. g.) a (kr. wieńca).

2.) P_v ; $V_v = ?$

$$P_v = 6 r^2 \pi.$$

$$r = \frac{a}{2}$$

$$r^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$P_v = \frac{6 a^2 \pi}{4} = \frac{3 a^2 \pi}{2}$$

$$V_v = 2 r^3 \pi.$$

$$V_v = \frac{2 \cdot a^3 \pi}{8}$$

$$V_v = \frac{a^3 \pi}{4}$$

2. g.) $r = h - 3$. $M_2 : M_1 = 40 : 27$, gdy $r + 2$; $h + 7$.

2.) $r = ?$ $h = ?$

$$r = h - 3$$

$$2(r+2)\pi(h+7) : 2r\pi h = 40 : 27$$

$$(rh + 2h + 7r + 14) : rh = 40 : 27$$

$$27rh + 27h + 189r + 378 = 40rh$$

$$-13rh + 189r + 27h + 378 = 0$$

$$13h^2 - 39h - 189h + 567 - 54h - 378 = 0$$

$$13h^2 - 282h + 189 = 0$$

$$h = \frac{282 \pm \sqrt{69696}}{26}$$

$$\begin{array}{r} 282 \pm 4 \\ 32 \\ 64 \\ 112 \\ 44 \\ 79524 \\ 9828 \\ 69696 \\ \hline \sqrt{69696} = 264 \\ 282 : 46.6 \\ 2096 : 524.4 \\ \hline 189.52 \\ 378 \\ 945 \\ 9828 \end{array}$$

$$h = \frac{282 \pm 264}{26}$$

$$h = \frac{546}{26} = 21 \text{ cm.}$$

$$r = h - 3$$

$$r = 18 \text{ cm.}$$

Zadanie.

19. II. 37.

Objętość walca równobocznego nie zmieni się, gdy promień jego podstawy powiększymy o 2 cm, a wysokość pomniejszymy o $5\frac{1}{4}$ cm. Obliczyć promień tego walca.

$$2r^3\pi = (r+2)^2\pi \cdot (2r - 5\frac{1}{4})$$

$$2r^3\pi = (r^2\pi + 4r\pi + 4\pi)(2r - 5\frac{1}{4})$$

$$2r^3\pi = 2r^3\pi + 8r^2\pi + 8r\pi - 5\frac{1}{4}r^2\pi - 21r\pi - 21\pi$$

$$2\frac{1}{4}r^2\pi - 13r\pi - 21\pi = 0$$

$$2\frac{1}{4}r^2 - 13r - 21 = 0$$

$$r = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 231}}{5\frac{1}{2}}$$

$$r = \frac{13 + 20}{5\frac{1}{2}} = \frac{33}{5\frac{1}{2}} = 6$$

$$r = 6 \text{ cm.}$$

Wdp.

Promień podstawy tego walca wynosi 6 cm.

$$\begin{array}{r} 2\frac{1}{4} \cdot 4 \\ 11\frac{1}{2} \cdot 21 \\ \hline 23 \\ 331 \\ 169 \\ \hline 400 \end{array}$$

Lekcja 17.

20. II. 37.

1. g.) $h = 3.5 \text{ m.}$

$2r = 2.6 \text{ dm.}$ $2R = 2.6 \text{ dm} + 5 \text{ mm.}$

2.) $C = ?$

$(C_{w.2.} = 7.7)$

$C = v \cdot C_w = v \cdot S.$

$v = R^2 \pi h - r^2 \pi h.$

$v = \pi h (R+r)(R-r).$

$C = \pi h s (R+r)(R-r).$

$C = 3.14 \cdot 35 \cdot 7.7 \cdot 0.5 \cdot 3.1$

$C = 1311.65 \text{ kg.}$

$$\begin{array}{r} 3.14 \cdot 35 \\ 109.70 \\ 942 \\ 109.92 \cdot 7.7 \\ 7693 \\ 7693 \\ 84623 \cdot 0.5 \\ 423115 \cdot 3.1 \\ 1269345 \\ 13116565 \text{ kg.} \end{array}$$

2. g.) $R-r = 6 \text{ cm.}$

$v_1 : v_2 = 16 : 9.$

2.) $R = ?$

$r = ?$

$R-r = 6.$

$\pi h (R+r)(R-r) : r^2 \pi h = 16 : 9.$

$16r^2 = 9R^2 - 9r^2.$

$25r^2 = 9R^2.$

$R = 6 + r.$

$25r^2 = 9(6+r)^2.$

$25r^2 = 9(36 + 12r + r^2).$

$25r^2 = 324 + 108r + 9r^2.$

$16r^2 - 108r - 324 = 0.$

$(8r^2 - 54r - 162 = 0.)$

$4r^2 - 27r - 81 = 0.$

$4r^2 - 27r - 81 = 0.$

$r = \frac{27 + \sqrt{729 + 1296}}{8}$

$r = \frac{27 + 45}{8} = \frac{72}{8} = 9.$

$r = 9.$

$R = 15.$

$$\begin{array}{r} 27^2 = 4 \\ 28 \\ 49 \\ 729 \\ 81 \cdot 16 \\ 486 \\ 1296 \\ 729 \\ \sqrt{2025} = 45. \\ 45 : 85.5 \\ = \end{array}$$

Zadanie.

23. II. 37.

Z walcowego pnia o długości $h = 5 \text{ m}$ i o średnicy $d = 80 \text{ cm}$ ma być wycięta belka o największym przekroju kwadratowym. Obliczyć ciężar belki i okrężków, mając ciężar właściwy drewna $s = 0.86$.

$C_1 = v_1 s.$

$C_2 = v_2 s.$

$C_2 = 111h r^2 s.$

$v_1 = 2r^2 h.$

$v_2 = 4 \text{ Od } h.$

$16 \text{ dm} \cdot 0.86$

$C_1 = 2r^2 h s.$

$\text{Od} = R - r.$

516

$16 \text{ dm} \cdot h$

$R^2 = \frac{r^2 \pi d}{360}.$

$1376 \text{ kg} \cdot 1.11$

$32 \text{ dm} \cdot 50 \text{ dm}$

$r^2 = \frac{R^2}{2}.$

5504

$1600 \text{ dm} \cdot 0.86 \text{ kg}$

$r^2 = \frac{R^2}{2}.$

1376

516

$\text{Od} = \frac{r^2 \pi}{4} - \frac{r^2}{2}.$

$156864 \text{ kg} \cdot 50 \text{ dm}$

$C_1 = 1376 \text{ kg.}$

$v_2 = 4h \frac{r^2(\pi - 2)}{4}.$

$C_2 = 784.32 \text{ kg.}$

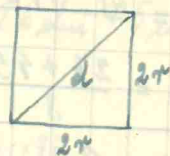
$v_2 = 111h r^2.$

Lekcja 18.

24. II. 37.

1. 1.) $d = 8 \text{ dm}$.

2.) $g = ?$ $v = ?$



$$g = 2p + m$$

$$p = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

$$m = 3a \cdot 2r = 6ar$$

$$g = \frac{2a^2}{4}\sqrt{3} + 6ar$$

$$g = \frac{a^2}{2}\sqrt{3} + 6ar$$

$$\frac{64 \text{ dm}^2}{60 \cdot 1.73} = 103.88 \text{ dm}^2$$

$$v = p \cdot h$$

$$p = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

$$p = \frac{3+^2\sqrt{3}}{4}$$

$$h = 2r$$

$$v = \frac{3+^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2r$$

$$v = \frac{6+^2\sqrt{3}}{4}$$

$$v = \frac{3+^2\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \frac{d}{\sqrt{8}}$$

$$a = r\sqrt{3}$$

$$g = \frac{3r^2}{2}\sqrt{3} + 6r^2\sqrt{3}$$

$$g = \frac{3r^2\sqrt{3} + 12r^2\sqrt{3}}{2} = \frac{15r^2\sqrt{3}}{2}$$

$$d^2 = 8r^2$$

$$r^2 = \frac{d^2}{8}$$

$$g = \frac{15 \cdot d^2\sqrt{3}}{16} = 103.8 \text{ dm}^2$$

$$r = \frac{d}{\sqrt{8}}$$

$$v = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{d^2}{8} \cdot \frac{d}{\sqrt{8}}$$

$$v = \frac{3d^3\sqrt{3}}{32\sqrt{2}}$$

$$v = \frac{3d^3\sqrt{6}}{64}$$

$$\sqrt{6} = 2.45$$

$$\frac{64 \text{ dm}^2 \cdot 8 \text{ dm}}{512 \text{ dm}^2 \cdot 3}$$

$$\frac{1536 \text{ dm}^2 \cdot 2.45}{7680}$$

$$\frac{6144}{3072}$$

$$\frac{376320 : 64 = 5879 \text{ dm}^2}{563}$$

$$620$$

2. 1.) $v_4 = 7942 \text{ m}^3$

$$g_6 = 209 \text{ m}^2$$

2.) $r = ?$ $h = ?$

$$v_4 = p \cdot h$$

$$g_6 = r \cdot h = 209 \text{ m}^2$$

$$p = 2r^2$$

$$r = \frac{209}{h}$$

$$v_4 = 2r^2 \cdot h = 7942$$

$$h = \frac{209}{r}$$

$$2 \left(\frac{209}{h} \right)^2 h = 7942$$

$$2r^2 \cdot \frac{209}{r} = 7942$$

$$2r \cdot 209 = 7942$$

$$209r = 3971$$

$$r = 19 \text{ m}$$

$$h = 11 \text{ m}$$

Zadanie.

25. II. 37.

Jak głęboko zauwry się w wodzie równoboczny walec drewniany o wysokości 40 cm, którego ciężar właściwy wynosi 0.85?

$$L_c = v \cdot \delta_c$$

$$2r^2\pi \delta_c = r^2\pi x$$

$$L_c = 2r^2\pi \delta_c$$

$$x = \frac{2r^2\pi \delta_c}{r^2\pi} = 2\delta_c$$

$$L_x = p \cdot x \cdot \delta_x$$

$$\frac{40 \text{ cm} \cdot 0.85}{3400 \text{ cm}}$$

$$L_x = r^2\pi x$$

Ostrorup.

Ostrorup jest to bryła graniasta ograniczona jednym wielokątem (podstawą) i tyłoma trójkątami ~~o~~ o wspólnym wierzchołku (ściany boczne) ile boków ma podstawa.

Ten wspólny wierzchołek ścian bocznych nazywa się wierzchołkiem ostrorupa.

Krawędzie (bocz., przypodł.). Wysokość (ostrorupa i ścian).

Ostrorup, którego krawędzie boczne są sobie równe nazywa się prostym, o przeciwnie razie pochyłym.

Ostrorup prosty mający za podstawę wielokąt foremny, nazywa się ostrorupem foremnym.

Ostrorup prosty mający za podstawę trójkąt równoboczny i mający krawędzie boczne równe prostopadłym, nazywa się czworoszczianem (wielok. for.).

Dwa zupełnie jednakowe ostrorupy proste o podstawie kwadratowej a o krawędziach bocznych równych przypodłanym złożone podstawami

dają osnościan.

$$Q = K + M.$$

Dwa ostrorupy o równych podstawach i równych wysokościach mają równe objętości.

Ostrorup o podstawie trójkątnej jest trzecią częścią graniastorupa prostego mającego z nim równą podstawę i równą wysokość.

$$V_0 = \frac{K \cdot h}{3}.$$

Lekcja 20.

$$\frac{b_1 h}{3} + \frac{b_2 h}{3} + \frac{b_3 h}{3} + \dots + \frac{b_{n-2} h}{3} = V.$$

$$V = (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-2}) \frac{h}{3}.$$

$$V = B \frac{h}{3}.$$

$$V = \frac{1}{3} K \cdot h.$$

$$V_8 = 2 \cdot \frac{1}{3} K h = \frac{2}{3} K h.$$

$$K = a^2.$$

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$V_8 = \frac{2}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$V_8 = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}.$$

9.) a (owrotnicia)

10.) $q = ?$; $v = ?$

$$q = R + M.$$

$$R = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$M = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$q = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{3a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$q = a^2 \sqrt{3}.$$

$$v = \frac{a^3 \sqrt{3}}{36}$$

$$v = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}.$$

$$v = \frac{1}{3} R h.$$

$$R = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

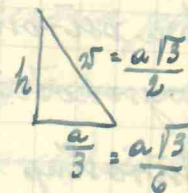
$$h^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}$$

$$h^2 = \frac{27a^2 - a^2}{36}$$

$$h^2 = \frac{26a^2}{36} = \frac{13a^2}{18} = a^2 \sqrt{3}$$

$$h = \frac{a \sqrt{6}}{3}$$

$$v = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \sqrt{6}}{3}$$



Zadanie.

2. III. 37.

Obliczyć powierzchnię i objętość ostrosłupa prostego, którego podstawa jest kwadrat wpisany w koło o promieniu $r = 5$ dm, a ścianami bocznymi trójkąty równoboczne.

$$q = R + M.$$

$$R = 2r^2.$$

$$M = 4r \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} \sqrt{3}$$

$$M = r \sqrt{2} \cdot r \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$M = 2r^2 \sqrt{3}.$$

$$q = 2r^2 + 2r^2 \sqrt{3}.$$

$$q = 2r^2(1 + \sqrt{3}).$$

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 50}{136.5}$$

$$q = 136.5 \text{ dm}^2.$$

$$v = \frac{1}{3} R h.$$

$$h = \sqrt{3 \frac{a^2}{4} - 2 \frac{r^2}{4}}$$

$$h = \sqrt{3 \frac{2r^2}{4} - 2 \frac{r^2}{4}}$$

$$h = \sqrt{3 \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2}}$$

$$h = \sqrt{2 \frac{r^2}{2}} = r.$$

$$v = \frac{2r^2 \cdot r}{3}$$

$$v = \frac{2r^3}{3}$$

$$250 : 3 = 83 \frac{1}{3}$$

$$v = 83 \frac{1}{3} \text{ dm}^3.$$

Lekcja 21.

4. III. 37.

9.) $r = 6$ m.

$h = 3r.$

10.) $q = ?$

$$q = R + M.$$

$$R = a^2 = (4r^2)$$

$$M = 4a \cdot \frac{h}{2} = 2a \cdot h.$$

$$q = a^2 + 2a \cdot h.$$

$$q = a(a + 2h).$$

$$a = 2r.$$

$$h^2 = 9r^2 + r^2$$

$$h = r \sqrt{10}.$$



$$q = 2r(2r + 2r \sqrt{10}).$$

$$q = 4r^2(1 + \sqrt{10}).$$

$$\frac{36 \cdot 4}{144}$$

$$\sqrt{10} = 3.16$$

$$\frac{100 \cdot 6.32}{3902.62}$$

$$4 \cdot 16 \cdot 144$$

$$1664$$

$$1064$$

$$q = 59904 \text{ m}^2.$$

Zadanie.

4.10.37.

Trójkąt równoboczny wpisany w koło o promieniu $r = 5$ cm jest podstawą ostrosłupa prostego, którego wysokość jest dwukrotnością krawędzi podstawowej.
 $P = ?$ $V = ?$

$$P = P_1 + P_2$$

$$P_1 = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_2 = 3r\sqrt{3} \cdot \frac{h}{2}$$

$$h^2 = 12r^2 + \left(\frac{3r}{6}\right)^2$$

$$h^2 = 12r^2 + \frac{r^2}{4}$$

$$4h^2 = 48r^2 + r^2$$

$$h = \sqrt{\frac{49r^2}{4}} = \frac{7r}{2}$$

$$P = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3r\sqrt{3} \cdot 7r}{4}$$

$$P = \frac{3r^2\sqrt{3} + 21r^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P = \frac{24r^2\sqrt{3}}{4} = 6r^2\sqrt{3}$$

$$\frac{173}{259.5} \cdot \frac{25.6}{150}$$

$$\frac{865}{173}$$

$$259.5 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} P h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3r^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{7r}{2}$$

$$V = \frac{3r^3\sqrt{3}}{8}$$

$$V = \frac{9r^3\sqrt{3}}{8}$$

$$V = \frac{3r^3\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{125.3}{375:2} = 187.5 \text{ cm}^3$$

$$P = 259.5 \text{ cm}^2$$

$$V = 187.5 \text{ cm}^3$$

Objętość prostego ostrosłupa prostok. o wys. 14 dm. wynosi 56 dm³. Powierzchnia przecięcia równoległego przez poprowadzenie płaszczyzny przez jego wierzchołek i prostopadłej do podstawy ma 35 dm². Obliczyć krawędzie podstawowe ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3} P h$$

$$P = a \cdot b$$

$$V = \frac{P \cdot h}{3}$$

$$P = \frac{3V}{h}$$

$$ab = \frac{3V}{h}$$

$$P_1 = \frac{1}{2} a^2 + b^2 \cdot h$$

$$a^2 + b^2 = \frac{4P_1}{h^2}$$

$$ab = 12$$

$$a^2 + b^2 = 25$$

$$b = \frac{12}{a}$$

$$a^2 + \frac{144}{a^2} - 25 = 0$$

$$a^4 + 144 - 25a^2 = 0$$

$$a^4 - 25a^2 + 144 = 0$$

$$\frac{56 \cdot 3}{168:14} = 12$$

$$\frac{1225.4}{4900:196} = 25$$

$$\frac{1225.4}{980}$$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 946}}{2}$$

$$\Delta = 49, \sqrt{49} = 7$$

$$x = \frac{25 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = 9 = a^2$$

$$a = \sqrt{9} = 3$$

$$a \cdot b = 12$$

$$b = \frac{12}{a}$$

1.) $a = 2 \text{ m}$.

2.) $q = 2$ $v = 2$

$$P = p + M.$$

$$p = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$M = 3 a \frac{w}{2}$$

$$q = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{3 a w}{2}$$

$$q = \frac{a^2 \sqrt{3} + 6 a w}{4}$$

$$q = \frac{a}{4} (a \sqrt{3} + 6 w)$$

$$q = \frac{a}{4} (a \sqrt{3} + 3 a)$$

$$q = \frac{a^2}{4} (\sqrt{3} + 3) = 473 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} p \cdot h$$

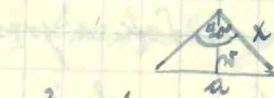
$$p = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$h^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{3 a^2}{36}$$

$$h^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{3 a^2}{36}$$

$$h^2 = \frac{6 a^2}{36}$$

$$h = \frac{a \sqrt{6}}{6}$$



$$a^2 = x^2 + x^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = a \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$w^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$w^2 = \frac{2 a^2 - a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

$$w = \frac{a}{2}$$



$$\frac{a}{3} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2}$$

$$6 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{6} \sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \sqrt{6}}{6}$$

$$V = \frac{a^3 \sqrt{18}}{72}$$

$$V = \frac{3 a^3 \sqrt{2}}{72}$$

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$$

$$141 : 3 = 0.47$$

$$V = \frac{8 \sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$V = 0.47 \text{ m}^3$$

1) Podstawa ostrosłupa prostego jest niekończącym się trójkątem równobocznym o boku $a = 4 \text{ m}$; wysokość ściany bocznej wynosi $w = 9 \text{ m}$. Obliczyć objętość tego ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3} p \cdot h$$

$$p = \frac{3 a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$h^2 = w^2 - \frac{3 a^2}{4}$$

$$h = \sqrt{w^2 - \frac{3 a^2}{4}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{w^2 - \frac{3 a^2}{4}}$$

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3} (w^2 - \frac{3 a^2}{4})}{4}$$

$$V = \frac{a^2}{4} \sqrt{3 (4 w^2 - 3 a^2)}$$

$$V = \frac{a^2}{4} \sqrt{3 (4 \cdot 9^2 - 3 \cdot 4^2)}$$

$$V = 115.1 \text{ m}^3$$

$$\begin{array}{r} 81.4 \\ 324 \\ \hline 48 \\ 276.3 \\ \hline \sqrt{828} = 28.77 \\ 428 : 48.8 \\ \hline 4400 : 567.7 \\ \hline 43100 : 574 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28.77 \cdot 4 \\ \hline 115.08 \text{ (dok 115.1)} \end{array}$$

2) Ostrosłup prosty, którego podstawa jest trójkątem równobocznym, znanym krótkość podłogi $a = 2 \text{ m}$ i wysokość $h = 1 \text{ m}$. Obliczyć powierzchnię i objętość tego ostrosłupa.

$$P = p + M$$

$$p = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$M = 3 a \frac{w}{2}$$

$$q = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{3 a w}{2}$$

$$q = \frac{a}{4} (a \sqrt{3} + 6 w)$$

$$w^2 = h^2 + \left(\frac{a}{6} \sqrt{3}\right)^2$$

$$w = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}$$

$$w = \sqrt{1^2 + \frac{2^2}{12}}$$

$$q = \frac{a}{4} (a \sqrt{3} + \sqrt{3 (12 h^2 + a^2)})$$

$$q = \frac{a}{4} (a \sqrt{3} + \sqrt{3 (12 \cdot 1^2 + 2^2)})$$

$$\begin{array}{r} 173.2 \\ 346 \\ 692 \\ \hline 1038 \\ 2 \end{array} = 519.$$

$$g = 519 \text{ m}^2.$$

$$V = \frac{1}{3} g h.$$

$$g = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$g = \frac{a^2 \sqrt{3}}{12}.$$

$$692 : 12 = 0.576$$

$$= 92$$

$$80$$

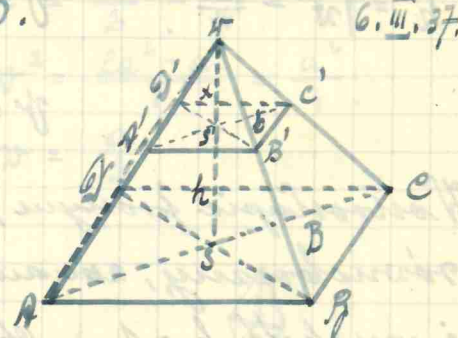
$$8$$

$$V = 0.576 \text{ m}^3.$$

Lekcja 23.

$$I.) A'B'C'D' \parallel A'B'C'D.$$

$$II.) A'B'C'D' \sim A'B'C'D.$$



I. Przekrój poprzeczny ostrosłupa jest wielokątem podobnym do podstawy.

$$I.) A'B' \parallel AB.$$

$$B'C' \parallel BC.$$

$$C'D' \parallel CD.$$

$$D'A' \parallel DA.$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'S'}{AS}.$$

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{B'S'}{BS}.$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} = \dots$$

$$\frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} \rightarrow \text{warunek wyrażenia proporcji bieżącej.}$$

$$\angle A' = \angle A.$$

$$\angle B' = \angle B.$$

$$\angle C' = \angle C.$$

$$\angle D' = \angle D.$$

$$A'B'C'D' \sim A'B'C'D.$$

II. Stosunek pola przekroju poprzecznego ostrosłupa do pola podstawy równa się stosunkowi kwadratów ich odległości od wierzchołka ostrosłupa.

$$I.) A'B'C'D' \parallel A'B'C'D.$$

$$II.) b : B = \overline{AS'}^2 : \overline{AS}^2.$$

$$III.) b : B = \overline{A'B'}^2 : \overline{AB}^2.$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'S'}{AS} = \frac{A'S'}{AS}.$$

$$b : B = \overline{AS'}^2 : \overline{AS}^2.$$

Lekcja 24.

10. III. 37.

$$P_s = R + b + M.$$

$$V_s = V - V_u.$$

$$V = \frac{1}{3} R (h + x).$$

$$V_u = \frac{1}{3} b x.$$

$$V_s = \frac{1}{3} R (h + x) - \frac{1}{3} b x.$$

$$V_s = \frac{1}{3} R h + \frac{1}{3} R x - \frac{1}{3} b x.$$

$$V_s = \frac{1}{3} R h + \frac{1}{3} x (R - b).$$

$$V_s = \frac{1}{3} R h + \frac{1}{3} \cdot \frac{h \sqrt{b}}{\sqrt{R} - \sqrt{b}} (R - b).$$

$$V_s = \frac{1}{3} R h + \frac{1}{3} \cdot \frac{h \sqrt{b} (\sqrt{R} + \sqrt{b})}{R - b} (R - b).$$

$$V_s = \frac{1}{3} R h + \frac{1}{3} h \sqrt{Rb} + \frac{1}{3} h b.$$

$$V_s = \frac{1}{3} h (R + \sqrt{Rb} + b).$$

$$V = \frac{1}{3} h R.$$

$$b : R = x^2 : (x + h)^2$$

$$\frac{x^2}{(x + h)^2} = \frac{b}{R}.$$

$$\left(\frac{x}{x + h}\right)^2 = \frac{b}{R}.$$

$$\frac{x}{x + h} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{R}}.$$

$$\sqrt{R} x = \sqrt{b} x + \sqrt{b} h.$$

$$(\sqrt{R} - \sqrt{b}) x = \sqrt{b} h.$$

$$x = \frac{h \sqrt{b}}{\sqrt{R} - \sqrt{b}}.$$

Pole powierzchni (P_s)

← objętość (V_s)

ostrosłupa ściętego.

Zadania:

g.) $A = 20 \text{ m}$ $a = 14 \text{ m}$ $c = 16 \text{ m}$.

h.) $V = ?$

$$V_s = \frac{1}{3} h (R + \sqrt{Rb} + b).$$

$$d = \frac{4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{2}$$

$$h^2 = c^2 - \frac{2a^2 - 4Aa + 2a^2}{4}$$

$$h = \sqrt{c^2 - \frac{2a^2 - 4Aa + 2a^2}{4}}$$

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{4c^2 - 2a^2 + 4Aa - 2a^2}$$

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{4c^2 - 2(a - A)^2}$$

$$V_s = \frac{1}{6} \sqrt{4c^2 - 2(a - A)^2} (R + \sqrt{Rb} + b).$$

$$R = A^2.$$

$$b = a^2.$$

$$V_s = \frac{1}{6} \sqrt{4c^2 - 2(a - A)^2} (A^2 + Aa + a^2).$$

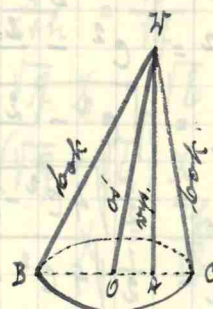
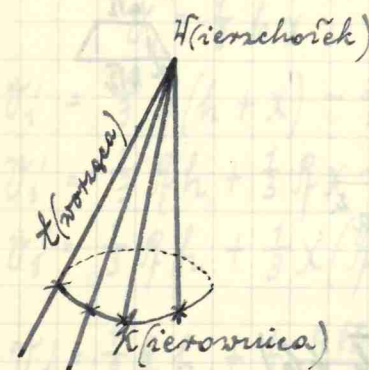
$$\begin{array}{r} 256 \cdot 4 \\ 1024 \\ 72 \\ \hline \sqrt{9152} = 30.85 : 6 = 5.14 \\ 52 : 6 \\ 5200 : 608.8 \\ 33600 : 616 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 400 \\ 196 \\ 280 \\ \hline 876 \cdot 5.14 \\ 3504 \\ 876 \\ \hline 4380 \\ 4492.64 \end{array}$$

$$V_s = 4492.64 \text{ m}^3.$$



Stożek jest to bryła okrągła ograniczona kołem i jedną powierzchnią krzywą t. zw. powierzchnią stożkową (pobocznicą).



$$\pi r = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot s^2$$

$$\Phi = P + M.$$

$$P = \pi r^2$$

Stożek prosty:

$$M = 2\pi r \frac{s}{2}$$

$$M = \pi r s$$

$$\Phi = \pi r^2 + \pi r s$$

$$\Phi = \pi r (r + s)$$

$$s = 2r$$

$$\Phi = 3\pi r^2$$

$$V = \frac{1}{3} P h$$

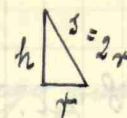
$$P = \pi r^2$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$s = 2r$$

$$h = r\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^3 \sqrt{3}$$



$$h = r\sqrt{3}$$

Zadanie.

Prowinizta pobocznicą stożka prostego jest wyinkiem koła, którego promień jest $a = 12$ dm większy od promienia podstawy stożka; kąt środkowy tego wyinka $\alpha = 200^\circ$. Obliczyć promień podstawy stożka.

1.) $s = r + a$ $a = 12$ dm $\alpha = 200^\circ$

2.) $r = ?$

$$r = s - a$$

$$s = \frac{180r}{180} = 1.8r$$

$$1.8r = r + a$$

$$0.8r = a$$

$$r = \frac{a}{0.8}$$

$$s = \frac{180 \cdot 2\pi r}{\pi \cdot 200}$$



$$\pi r = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot s^2$$

$$120 : 8 = 15$$

$$r = 15$$
 dm

1. D.) $h = 8 \text{ m.}$

h.) $q = ? \quad v = ?$

$$h = r\sqrt{3}$$

$$r = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$v = \frac{1}{3} r^3 \pi \sqrt{3}$$

$$v = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^3 \pi \sqrt{3}$$

$$v = \frac{1}{3} \cdot \frac{h^3}{3\sqrt{3}} \cdot \pi \sqrt{3}$$

$$v = \frac{h^3 \pi}{9}$$

$$q = r\pi(r+s) \quad s = 2r$$

$$q = 3r^2\pi$$

$$q = 3 \frac{h^2}{3} \pi$$

$$q = h^2 \pi$$

$$3 \cdot 14 \cdot 64$$

$$1256$$

$$1884$$

$$q = 20096 \text{ m}^2$$

$$512 \cdot 3 \cdot 14$$

$$2048$$

$$512$$

$$1536$$

$$160768 : 9 = 178'63$$

$$70$$

$$56$$

$$28$$

2. D.) $q = 254'34 \text{ m}^2$

h.) $v = ?$

$$v = \frac{1}{3} r^3 \pi \sqrt{3}$$

$$q = 3r^2\pi$$

$$r^2 = \frac{q}{3\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{q}{3\pi}}$$

$$v = \frac{1}{3} \cdot \frac{q}{3\pi} \sqrt{\frac{q}{3\pi}} \pi \sqrt{3}$$

$$v = \frac{q\sqrt{3}}{9\pi} \sqrt{\frac{q}{3\pi}}$$

$$v = \frac{q\sqrt{3}}{9\pi} \sqrt{\frac{q}{3\pi}}$$

$$v = \frac{q}{9} \sqrt{\frac{q}{\pi}}$$

$$254'34 : 9 = 28'26$$

$$74$$

$$23$$

$$54$$

$$28'26 \cdot 9$$

$$254'34$$

$$v = 254'34 \text{ m}^3$$

$$254'34 : 3 \cdot 14 = 81$$

$$= 314$$

Godziawa stoika prostego tworzy z jego pobocznicą stosunek = 3:7. Gdy promień podławy pomniejszymy, a bok stoika powiększymy o 3 dm, to pobocznica tego stoika będzie trzy razy tak wielka jak jego podława. Obliczyć promień i bok stoika.

$$r^2\pi : r\pi s = 3:7$$

$$\pi(r-3)(s+3) = 3(r-3)^2\pi$$

$$r:s = 3:7$$

$$3s = 7r$$

$$s = \frac{7r}{3}$$

$$rs - 3s + 3r - 9 = 3r^2 - 18r + 27$$

$$\frac{7r^2}{3} - 7r + 3r - 9 = 3r^2 - 18r + 27$$

$$\frac{7r^2}{3} - 4r - 9 = 3r^2 - 18r + 27$$

$$7r^2 - 12r - 27 = 9r^2 - 54r + 81$$

$$-2r^2 + 42r - 108 = 0$$

$$r^2 - 21r + 54 = 0$$

$$r = \frac{21 + \sqrt{441 - 216}}{2}$$

$$r = \frac{21 + 15}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ dm.}$$

$$s = \frac{18 \cdot 7}{3} = 42$$

$$s = 42 \text{ dm.}$$

Obliczyć powierzchnię stoika równobocznego, którego objętość $V = 0.16 \text{ m}^3$.

$$Q = 3r^2\pi, \quad Q = 3\sqrt{\frac{QV^2}{3\pi^2}} \pi = 3\sqrt{\frac{3V^2}{\pi^2}} \pi.$$

$$V = \frac{1}{3} r^3 \pi \sqrt{3}, \quad Q = 3\sqrt{\frac{3V^2 \pi^2}{\pi^2}} = 3\sqrt{3V^2 \pi}.$$

$$3V = r^3 \pi \sqrt{3}.$$

$$r^3 = \frac{3V}{\pi \sqrt{3}}.$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi \sqrt{3}}}.$$

$$Q = 3 \left(\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi \sqrt{3}}} \right)^2 \pi.$$

Lekcja 27.

1.) h .

$$Q : M = m : u.$$

2.) r, s .

$$Q : M = m : u.$$

$$r\pi(r+s) : r\pi s = m : u.$$

$$(r+s) : s = m : u.$$

$$ur + us = ms.$$

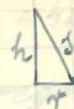
$$ur = ms - us.$$

$$s(m-u) = ur.$$

$$s = \frac{ur}{m-u}.$$

$$r^2 = s^2 - h^2.$$

$$r^2 = \frac{u^2 r^2}{m^2 - 2mu + u^2} - h^2.$$



$$u^2 r^2 - 2mu r^2 + u^2 r^2 = u^2 r^2 - h^2 u^2 + 2mu h^2 - u^2 h^2.$$

$$u^2 r^2 - 2mu r^2 + u^2 r^2 = -h^2 u^2 + 2mu h^2 - u^2 h^2.$$

$$r^2 u (2u - m) = h^2 (m - u)^2.$$

$$r^2 = \frac{h^2 (m - u)^2}{u (2u - m)}.$$

$$r = \frac{h (m - u)}{\sqrt{u (2u - m)}}.$$

$$s = \frac{u h (m - u)}{m - u \sqrt{u (2u - m)}}.$$

$$s = \frac{u h}{\sqrt{u (2u - m)}}.$$

Zadanie.

18. III. 37.

17. III. 37.

10) Podstawę ostrosłupa, opisanego w stożek prosty, jest kwadrat. Objętość tego ostrosłupa $V = 100 \text{ m}^3$, powierzchnia zaś trójkąta, otrzymanego przez przecięcie ostrosłupa płaszczyzną, przeprowadzoną przez dwie przeciwległe krawędzie boczne, wynosi $a = 30 \text{ m}^2$. Obliczyć promień i wysokość stożka.

$$1.) V = 100 \text{ m}^3.$$

$$a = 30 \text{ m}^2.$$

$$2.) r; h.$$

$$V = \frac{1}{3} p h.$$

$$p = b^2.$$

$$b = r\sqrt{2}.$$

$$p = 2r^2.$$

$$V = \frac{1}{3} 2r^2 h.$$

$$V = \frac{1}{3} 2r^2 \frac{a}{r}.$$

$$V = \frac{2r^2 a}{3r}.$$

$$V = \frac{2ra}{3}.$$

$$3V = 2ra.$$

$$r = \frac{3V}{2a}.$$

$$300 \text{ m}^3 : 60 \text{ m}^2 = 5 \text{ m}.$$

$$r = 5 \text{ m}.$$

$$\frac{900 \text{ m}^3 \cdot 2}{1800 \text{ m}^2 : 300 \text{ m}^2} = 6 \text{ m}.$$

$$h = 6 \text{ m}.$$

$$a = d \cdot \frac{h}{2}$$

$$d = b\sqrt{2}.$$

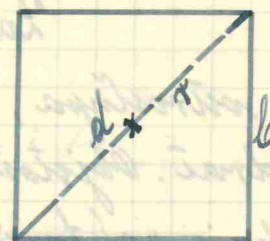
$$d = 2r.$$

$$a = 2r \frac{h}{2}.$$

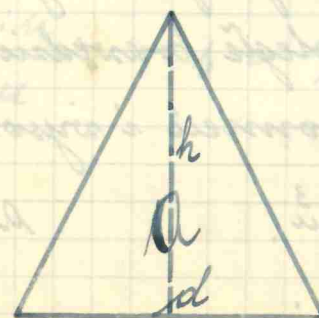
$$a = hr.$$

$$h = \frac{a}{r}.$$

$$h = \frac{2a^2}{3V}.$$



$$d = 2r.$$



$$d = b\sqrt{2}.$$

$$b = r\sqrt{2}.$$

$$d = 2r.$$

1). Objętość stoika równobocznego $v = 42.6 \text{ dm}^3$. Obliczyć powierzchnię i objętość mniejszego stoika trójkątnego, opisanego na tym stoiku.

$$Q = p + m.$$

$$p = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$m = 3 \frac{2r\sqrt{3} \cdot 2r}{2}.$$

$$Q = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 6r^2 \sqrt{3}.$$

$$a = 2r\sqrt{3}.$$

$$Q = 3r^2 \sqrt{3} + 6r^2 \sqrt{3}.$$

$$Q = 9r^2 \sqrt{3}.$$

$$V = \frac{1}{3} r^3 \pi \sqrt{3}; (r = 2r; h = r\sqrt{3}).$$

$$3V = r^3 \pi \sqrt{3}.$$

$$r^3 = \frac{3V}{\pi \sqrt{3}}.$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi \sqrt{3}}}.$$

$$Q = 9\sqrt{3} \sqrt[3]{\frac{3V^2}{\pi^2}}.$$

$$Q = 127.844 \text{ dm}^2.$$

$$V_1 = \frac{1}{3} p h.$$

$$V_1 = \frac{1}{3} 2r^2 \sqrt{3} \cdot r\sqrt{3}.$$

$$V_1 = 2r^3.$$

$$V_1 = \frac{9V}{\pi \sqrt{3}}.$$

$$V_1 = \frac{9V \sqrt{3}}{3\pi}.$$

$$V_1 = \frac{3V \sqrt{3}}{\pi}.$$

$$\frac{42.6 \cdot 3}{127.8 \cdot 1.73}$$

$$\frac{3834}{8946}$$

$$\frac{2210.94}{1294} : 374 = 70.4$$

$$= 38 \text{ dm}^3.$$

$$V_1 = 70.46 \text{ dm}^3.$$

1. a, b.

2. g, v.

$$g = M_1 + M_2.$$

$$M_1 = r\pi a.$$

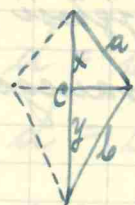
$$M_2 = r\pi b.$$

$$g = r\pi a + r\pi b.$$

$$r^2 = xy.$$

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2}.$$

$$r = \frac{ab}{c}.$$

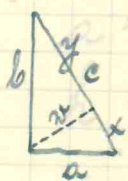


$$g = r\pi(a+b).$$

$$g = \frac{ab\pi}{c}(a+b).$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$g = \frac{ab\pi(a+b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



$$a^2 = cx.$$

$$x = \frac{a^2}{c}.$$

$$b^2 = cy.$$

$$y = \frac{b^2}{c}.$$

$$c : a = a : x$$

$$a^2 = cx$$

$$b^2 = cy$$

$$xy = xy.$$

$$v = v_1 + v_2.$$

$$v_1 = \frac{1}{3} r^2 \pi x.$$

$$v_2 = \frac{1}{3} r^2 \pi y.$$

$$v = \frac{1}{3} r^2 \pi x + \frac{1}{3} r^2 \pi y.$$

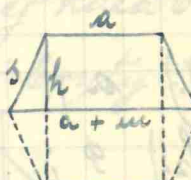
$$v = \frac{1}{3} r^2 \pi (x+y).$$

$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 c.$$

$$v = \frac{1}{3} \frac{a^2 b^2 \pi c}{c^2}.$$

$$v = \frac{a^2 b^2 \pi}{3(a^2 + b^2)}.$$

17. Trapez równoramienny, którego wysokość $h = 4$ dm, a boki równoległe $a = 10$ dm i $a + m = 16$ dm, utworzył obrotem około większego boku równoległego bryłę. Obliczyć powierzchnię i objętość tej bryły.



$$g = M_w + 2M_s.$$

$$M_w = L + \pi a.$$

$$M_s = r\pi s.$$

$$r = h.$$

$$g = 2h\pi a + 2h\pi s.$$

$$g = 2h\pi(a + s).$$

$$s = \sqrt{h^2 + \frac{m^2}{4}}.$$

$$g = 2h\pi\left(a + \sqrt{h^2 + \frac{m^2}{4}}\right).$$

$$g = 2h\pi\left(a + \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + m^2}\right).$$

$$\begin{array}{r} 3.14 \cdot 8 \text{ dm} \\ 25.12 \text{ dm} \cdot 15 \text{ dm} \\ 12.560 \\ \hline 376.80 \text{ dm}^2. \end{array}$$

$$g = 376.8 \text{ dm}^2.$$

$$V = V_x + 2V_s.$$

$$V_x = h^2 \pi a.$$

$$V_s = \frac{1}{3} h^2 \pi \frac{u}{2}.$$

$$V = h^2 \pi a + \frac{u}{3} h^2 \pi.$$

$$V = h^2 \pi \left(a + \frac{u}{3} \right).$$

$$\frac{3.14 \cdot 16 \text{ dm}^2}{1884}$$

$$\frac{5024 \text{ dm}^2 \cdot 12 \text{ dm}}{10048}$$

$$60288 \text{ dm}^3.$$

$$V = 60288 \text{ dm}^3.$$

Ćwiczenie 29.

1.) a ; $a + u$; h .

2.) ϕ ; V .

$$\phi = M_x + 2M_s.$$

$$M_x = 2h\pi(a+u).$$

$$M_s = h\pi s.$$

$$s = \sqrt{h^2 + \frac{u^2}{4}}.$$

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{4h^2 + u^2}.$$

$$M_s = h\pi \frac{1}{2} \sqrt{4h^2 + u^2}.$$

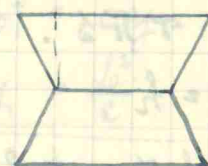
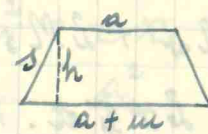
$$\phi = 2h\pi(a+u) + h\pi \sqrt{4h^2 + u^2}.$$

$$\phi = h\pi(2a + 2u + \sqrt{4h^2 + u^2}).$$

$$V = V_x + 2V_s.$$

$$V_x = h^2 \pi (a+u).$$

$$V_s = \frac{1}{3} h^2 \pi \frac{u}{2}.$$



3. IV. 37.

$$V = h^2 \pi (a+u) - \frac{u}{3} h^2 \pi.$$

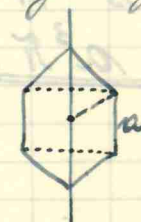
$$V = h^2 \pi \left(a+u - \frac{u}{3} \right).$$

$$V = h^2 \pi \left(a + \frac{2}{3} u \right).$$

Zadanie.

6. IV. 37.

Sześcian umiarowy o boku $a = 12.5 \text{ dm}$ utworzyć obrotem około symetrycznej kąta bryły. Obliczyć powierzchnię i objętość tej bryły.



$$\phi = \phi_x + 2\phi_s.$$

$$\phi_x = 2 + \pi a.$$

$$\phi_s = \pi a.$$

$$\phi = 2\pi a + 2 + \pi a.$$

$$\phi = 4 + \pi a.$$

$$r = \frac{a}{2} \sqrt{3}.$$

$$\phi = 2a^2 \pi \sqrt{3}.$$

$$12.5^2 = \frac{144}{120}$$

$$\frac{2.5}{156.25 \cdot 2}$$

$$312.50 \cdot 3.14$$

$$12500$$

$$3125$$

$$9375$$

$$981.250 \cdot 1.73$$

$$294375$$

$$686875$$

$$98125$$

$$\phi = 1697.5625 \text{ dm}^2.$$

$$V = V_n + 2V_s$$

$$V_n = r^2 \pi a$$

$$V_s = \frac{1}{3} r^2 \pi \frac{a}{2}$$

$$V = r^2 \pi a + \frac{1}{3} r^2 \pi a$$

$$V = \frac{4}{3} r^2 \pi a$$

$$r = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot 3 \pi a$$

$$V = a^3 \pi$$

$$\begin{array}{r} 156.25 \cdot 12.5 \\ 78125 \\ 31250 \\ 15625 \\ \hline 1953125 \cdot 3.14 \\ 7812500 \\ 1953125 \\ 5859375 \\ \hline 613281250 \end{array}$$

$$V = 61328125 \text{ dm}^3$$

Lekcja 30.

4. IV. 37.

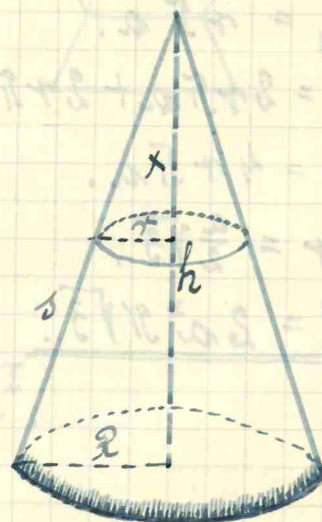
Stosunek sześcianów.

$$R : b = h^2 : x^2$$

$$R^2 \pi : r^2 \pi = h^2 : x^2$$

$$R^2 : r^2 = h^2 : x^2$$

$$R : r = h : x$$



$$Q.) = R; r; h; s$$

$$h.) \quad \varphi = ? \quad V = ?$$

$$\varphi = R + b + M$$

$$R = R^2 \pi$$

$$b = r^2 \pi$$

$$M = \frac{(2R\pi + 2r\pi)s}{2}$$

$$M = (R+r)\pi s$$

$$\varphi = R^2 \pi + r^2 \pi + (R+r)\pi s$$

$$\varphi = \pi [R^2 + r^2 + (R+r)s]$$

$$V = \frac{1}{3} h (R + \sqrt{Rb} + b)$$

$$V = \frac{1}{3} h (R^2 \pi + \sqrt{R^2 \pi \cdot r^2 \pi} + r^2 \pi)$$

$$V = \frac{1}{3} h (R^2 \pi + Rr\pi + r^2 \pi)$$

$$V = \frac{1}{3} h \pi (R^2 + Rr + r^2)$$

$$1.) h = 12 \text{ cm. } pK = 336 \text{ cm. } x = 15 \text{ cm.}$$

$$2.) R = ? \quad r = ?$$

$$p = (2R + 2r) \frac{h}{2}$$

$$p = (R + r)h$$

$$(R + r)12 = 336$$

$$R + r = 28$$

$$R : r = (h + x) : x$$

$$R : r = 27 : 15$$

$$R : r = 9 : 5$$

$$R + r = 28$$

$$9r = 5R$$

$$r = \frac{5R}{9}$$

$$R + \frac{5R}{9} = 28$$

$$9R + 5R = 252$$

$$14R = 252$$

$$R = 18 \text{ cm.}$$

$$252 : 14 = 18$$

712

$$18 + r = 28$$

$$r = 28 - 18$$

$$r = 10 \text{ cm.}$$

Lekeja 31.

14. IV. 37.

$$1.) R : r : h$$

$$2.) V_1 - V_2 = ?$$

$$V = V_1 - V_2$$

$$V_1 = \frac{1}{3} h \pi (R^2 + Rr + r^2)$$

$$V_2 = \frac{1}{3} h (R + \sqrt{Rb} + b)$$

$$V = \frac{1}{3} h \pi (R^2 + Rr + r^2) - \frac{1}{3} h (R + \sqrt{Rb} + b)$$

$$V = \frac{1}{3} h [\pi (R^2 + Rr + r^2) - (R + \sqrt{Rb} + b)]$$

$$R = \frac{A^2}{L^2} = A^2$$

$$b = a^2$$

$$A = R\sqrt{L}$$

$$a = r\sqrt{L}$$

$$R = 2R^2$$

$$b = 2r^2$$

$$V = \frac{1}{3} h [\pi (R^2 + Rr + r^2) - (2R^2 + \sqrt{2R^2 2r^2} + 2r^2)]$$

$$V = \frac{1}{3} h [\pi (R^2 + Rr + r^2) - (2R^2 + 2Rr + 2r^2)]$$

$$V = \frac{1}{3} h [\pi (R^2 + Rr + r^2) - 2(R^2 + Rr + r^2)]$$

$$V = \frac{1}{3} h (R^2 + Rr + r^2) (\pi - 2)$$

$$V = \frac{h}{3} (\pi - 2) (R^2 + Rr + r^2)$$

$$V = \frac{h}{3} (\pi - 2) (R^2 + r^2 + Rr)$$

Zadanie.

15. IV. 37.

Sześciokat uniarny o boku "a" utworzył obro.
tem około symetralnej boku bryły.
Obliczyć objętość tej bryły.

$$V = 2 V_1.$$

$$V_1 = \frac{1}{3} h \pi (R^2 + Rr + r^2).$$

$$V = \frac{2}{3} h \pi (R^2 + Rr + r^2).$$

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3}.$$

$$R = a.$$

$$\frac{a}{2} r = \frac{a}{2}.$$

$$V = \frac{2}{3} \frac{a}{2} \sqrt{3} \pi \left(a^2 + \frac{a \cdot a}{2} + \frac{a^2}{4} \right).$$

$$V = \frac{a}{3} \sqrt{3} \pi \left(a^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \right).$$

$$V = \frac{a \pi \sqrt{3}}{3} \left(\frac{4a^2 + 2a^2 + a^2}{4} \right).$$

$$V = \frac{a \pi \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{7a^2}{4}.$$

$$V = \frac{7a^3 \pi \sqrt{3}}{12} = \frac{7}{12} a^3 \pi \sqrt{3}.$$

Lekcja 32.

16. IV. 37.

Wielościanny foremny.

Wielościanny foremny jest to bryła graniasta mająca wszystkie elementy sobie równe:

- 1) wszystkie krawędzie sobie równe
- 2) wszystkie kąty płaskie " "
- 3) wszystkie kąty dwusieczne " "
- 4) wszystkie ukośniki " "

I. Ściany Δ - ukośniki trójkątne - czworoszczyn foremny.

II. " " - " czworoszczynne - śróstiokąt "

III. " " - " pięciokątne - dwudziestokąt "

IV. " $\square$ - " trójkątne - sześciokąt "

$\Rightarrow$ (Liczba przekątnych z jednego wierzchołka - $n - 3$.
Suma kątów wewnętrznych - $(n - 2) \cdot 180^\circ$.
Jeden kąt wielok. foremnego - $\frac{(n - 2) 180^\circ}{n}$.)

V. Ściany $\square$ - ukośniki trójkątne - dwunastokąt foremny.

Figury obrotowe.

Figura obrotowa jest to bryła okrągła, która powstaje przez obrót figury płaskiej dookoła osi.

Lekcja 33.

17. IV. 37.

Kula.

Kula jest to bryła okrągła ograniczona jedną jedyną powierzchnią krzywą, zwaną powierzchnią kuli.

Powierzchnia kuli jest miejscem geometrycznym punktów w przestrzeni, równo oddalonych od jednego stałego punktu, zwanego środkiem kuli.

Przekrój kuli dowolną płaszczyzną jest kołem.

Przekrój kuli płaszczyzną przechodzącą przez środek kuli nazywa się kołem wielkim. Przekrój pionowy nazywany osią;

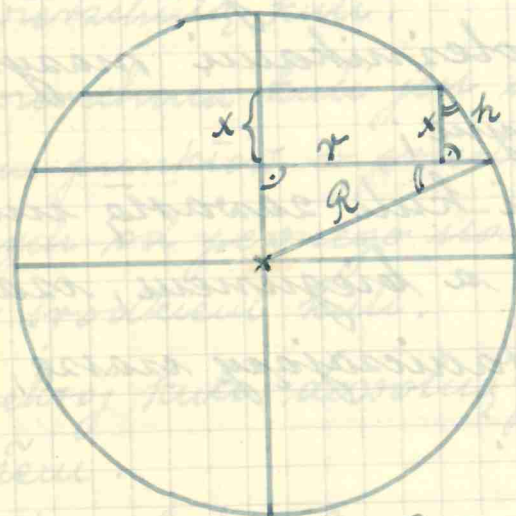
jej końce biegunami;
koła wielkie, przechodzące przez bieguny, południkami;
koła wielkie, prostopadłe do osi, równikami;
koła do równika równoległe, równoleżnikami.

Kręć powierzchnii kuli ograniczonej dowolną równoleżnikami nazywamy pasem sferycznym;
kręć powierzchnii kuli zawartą między równoleżnikami a biegunem, nazywamy równoleżnik ograniczający pas, kręć pasu.

Kręć kuli ograniczonej pasem i płaszczyzną równoleżnika stanowiącego brzeg pasu nazywamy odcinkiem.

Klasyczna przechodząca przez środek kuli dzieli kulę na dwa równe odcinki zwane półkulami.

Część kuli ograniczoną ciętą i powierzchnią stoika, otrzymaną przez połączenie wszystkich punktów brzegu cięty ze środkiem kuli, nazywamy wycinkiem kuli.



L.: pas b. wąski.

$$p = 2\pi h.$$

$$r : R = x : h.$$

$$rh = Rx.$$

$$p = 2R\pi x.$$

$$P_p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n.$$

$$P_p = 2R\pi x_1 + 2R\pi x_2 + \dots + 2R\pi x_n.$$

$$P_p = 2R\pi(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n).$$

$$\boxed{P_p = 2R\pi X.}$$

Pole pasa sferycznego oblicza się mnożąc obwód koła wielkiego przez wysokość pasa mierzoną na osi.

Lekcja 34.

21. IV. 37.

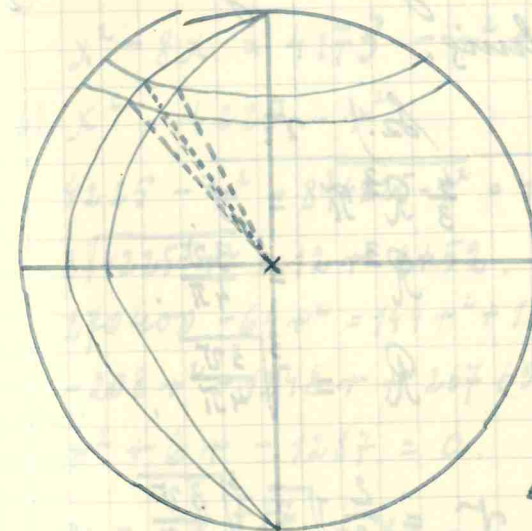
$$\boxed{L = 2R\pi X.}$$

$$L = 2R\pi x_1 + 2R\pi x_2 + \dots + 2R\pi x_n.$$

$$L = 2R\pi(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

$$L = 2R\pi(2R).$$

$$\boxed{L = 4R^2\pi.}$$



$$V = \frac{1}{3} b R.$$

$$V = \frac{1}{3} b_1 R + \frac{1}{3} b_2 R + \dots + \frac{1}{3} b_n R.$$

$$V = \frac{1}{3} (b_1 + b_2 + \dots + b_n) R.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4R^2\pi \cdot R.$$

$$\boxed{V = \frac{4}{3} R^3\pi.}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{3} C R.}$$

$$\boxed{Vol = W - S.}$$

$$1.) V_{pr} = a \quad P_k = P_{pr}$$

$$2.) R$$

$$4 R^2 \pi = 6 r^2 \pi$$

$$2 R^2 = 3 r^2$$

$$R = \sqrt{\frac{3 r^2}{2}}$$

$$R = r \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$R = \frac{1}{2} r \sqrt{6}$$

$$2 r^3 \pi = a$$

$$r^3 = \frac{a}{2\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}} \sqrt{6}$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{6} \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$$

Zadanie.

22. IV. 37.

3) Objętość kuli wynosi V . Obliczyć promień podstawy stoika równobocznego, który ma z tą kulą równą powierzchnię.

$$1.) V \quad P_{pr} = P_k$$

$$2.) r$$

$$3 r^2 \pi = 4 R^2 \pi$$

$$3 r^2 = 4 R^2$$

$$r^2 = \frac{4 R^2}{3}$$

$$r = \frac{2 R}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{2 R \sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{4}{3} R^2 \pi = V$$

$$R^2 = \frac{3 V}{4 \pi}$$

$$R = \sqrt{\frac{3 V}{4 \pi}}$$

$$r = \frac{2}{3} \sqrt{3} \sqrt{\frac{3 V}{4 \pi}}$$

7) Kulę o promieniu 65 cm przecięto dwiema płaszczyznami. Promienie tych przekrojów różnią się od siebie o 6 cm, a ich odległości od środka kuli o 4 cm. Obliczyć promień przekroju mniejszego i jego odległość od środka kuli.

$$1.) R = 65 \text{ cm} \quad R' - r = 6$$

$$2.) r; x$$

$$a.) (x-4)^2 = R^2 - (r+6)^2$$

$$b.) x^2 = R^2 - r^2$$

$$a.) x^2 - 8x + 16 = 4225 - r^2 - 12r - 36$$

$$x^2 - 8x = 4173 - r^2 - 12r$$

$$b.) x^2 = 4225 - r^2$$

$$4225 - r^2 - 8\sqrt{4225 - r^2} = 4173 - r^2 - 12r$$

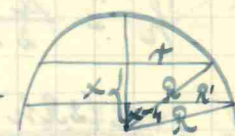
$$8\sqrt{4225 - r^2} = 12r + 52$$

$$270400 - 64r^2 = 144r^2 + 1248r + 2704$$

$$-208r^2 - 1248r + 267696 = 0$$

$$r^2 + 6r - 1287 = 0$$

$$r = \frac{-6 \pm 72}{2} = 33 \text{ cm}$$



$$x^2 = 4225 - r^2$$

$$x^2 = 4225 - 1089$$

$$x^2 = 3136$$

$$x = 56 \text{ cm}$$

Lekeja 35.

24. IV. 37.

1.) $R = 10 \text{ km}$. $C = u R$. $u = 5$.

2.) h .

$C = u R$.

$2 R \pi h = u r^2 \pi$.

$h = \frac{u r^2 \pi}{2 R \pi}$.

$h = \frac{u r^2}{2 R}$.

$h = \frac{u (2 R h - h^2)}{2 R}$.

$h 2 R = u (2 R h - h^2)$.

$2 R h = u 2 R h - u h^2$.

$u h^2 - 2 R h + u 2 R h = 0$.

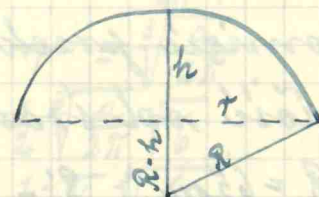
$h (2 R - 2 R u + h u) = 0$.

$2 R - 2 R u + h u = 0$.

$h u = 2 R u - 2 R$.

$h = \frac{2 R u - 2 R}{u}$.

$h = \frac{2 R (u - 1)}{u}$.



$r^2 = R^2 - (R - h)^2$.

$r^2 = R^2 - R^2 + 2 R h - h^2$.

$r^2 = 2 R h - h^2$.

Zadanie.

27. IV. 37.

12.) Ile km² powierzchni ziemi widzimy z wysokości $h = 20 \text{ km}$. ($R = 6377.4 \text{ km}$).

$C = 2 R \pi X$.

$R^2 = (R + h)(R - X)$.

$-\frac{R^2}{R + h} + R = X$.

$X = R - \frac{R^2}{R + h}$.

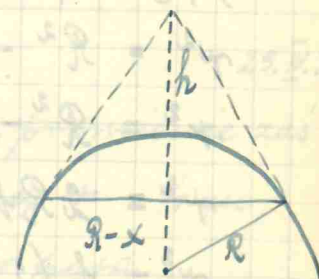
$X = \frac{R^2 + R h - R^2}{R + h}$.

$X = \frac{R h}{R + h}$.

$C = 2 R \pi X$.

$C = \frac{2 R^2 \pi h}{R + h}$.

$$\begin{array}{r} 6377.4 \cdot 6377.4 \\ \hline 255096 \\ 446418 \\ 446418 \\ \hline 191322 \\ 382644 \\ \hline 40671230.76 \cdot 3.14 \\ \hline 16268492.304 \\ 40671230.76 \\ \hline 12201369.228 \\ \hline 127707664.5864 \end{array}$$



6377.4

20

6397.4

$$\begin{array}{r} 127.707.664.5864 \text{ km}^2 \cdot 20 \text{ km} \\ \hline 2.554.153.291.728 \text{ km}^2 \cdot \text{km} \cdot 2 \\ \hline 6397.4 \text{ km} \\ \hline 3198.7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2.554.153.291.728 : 3198.7 = 798.500 \\ \hline 315063 \\ 271803 \\ \hline 159069 \end{array}$$

$C = 798 500 \text{ km}^2$.

1.) $P_c; h.$

2.) $P_{rc}.$

$$P_{rc} = \pi r^2 h.$$

$$r^2 = R^2 - (R-h)^2.$$

$$r^2 = R^2 - R^2 + 2Rh - h^2.$$

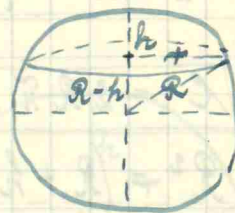
$$r^2 = 2Rh - h^2.$$

$$r^2 = h(2R - h).$$

$$P_{rc} = h\pi(2R - h).$$

$$P_{rc} = h\pi\left(\frac{P_c}{\pi h} - h\right).$$

$$P_{rc} = P_c - h^2\pi.$$



$$P_c = 2\pi R h.$$

$$R = \frac{P_c}{2\pi h}.$$

$$2R = \frac{P_c}{\pi h}.$$

1.) $P_o = P_{sr}.$ $r_1 = h.$

$R.$

2.) $h.$

$$P_o = P_{sr}.$$

$$2\pi R h + \pi r^2 h = 3\pi r_1^2 h.$$

$$2\pi R h + \pi r^2 h = 3\pi h^2 h.$$

$$2Rh + r^2 = 3h^2.$$

$$2Rh + 2Rh - h^2 = 3h^2.$$

$$4Rh - 4h^2 = 0.$$

$$r^2 = R^2 - (R-h)^2.$$

$$r^2 = R^2 - R^2 + 2Rh - h^2.$$

$$r^2 = 2Rh - h^2.$$

$$4h^2 - 4Rh = 0.$$

$$h(4h - 4R) = 0.$$

$$4h - 4R = 0.$$

$$4h = 4R.$$

$$h = R.$$

Zadanie.

16.) Powierzchnia kuli $P = 314159 \text{ m}^2$, promień zaś podłaz pasa kulistego wynosi $r = 4 \text{ m}$, $r_1 = 3 \text{ m}$. Obliczyć powierzchnię tego pasa.

1.) $P; r; r_1.$ 2.) $P_1.$

$$P = 2\pi R^2.$$

$$P = 4\pi R^2.$$

$$R^2 = \frac{P}{4\pi}.$$

$$R = \sqrt{\frac{P}{4\pi}} = \frac{\sqrt{P\pi}}{2\pi}.$$

$$P_1 = \frac{2\pi R h}{2\pi}.$$

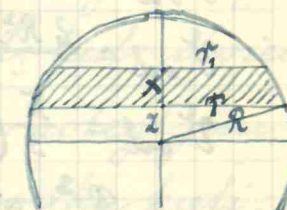
$$P_1 = \sqrt{P\pi} X.$$

$$x^2 = R^2 - r^2.$$

$$x = \sqrt{\frac{P}{4\pi}} - r^2.$$

$$(X+x)^2 = R^2 - r_1^2.$$

$$X+x = \sqrt{\frac{P}{4\pi}} - r_1^2.$$



$$X = \sqrt{\frac{P}{4\pi}} - r^2 - \sqrt{\frac{P}{4\pi}} - r_1^2.$$

$$P_1 = \sqrt{P\pi} \left(\sqrt{\frac{P}{4\pi}} - r^2 - \sqrt{\frac{P}{4\pi}} - r_1^2 \right).$$

$$P_1 = 314159 \text{ m}^2 \cdot 1 \text{ m} = 314159 \text{ m}^3.$$

$$\frac{314159 \text{ m}^2}{4 \cdot 314159} = \frac{100}{4} = 25 \text{ m}^2 - 9 \text{ m}^2 = 16 \text{ m}^2.$$

$$\sqrt{16 \text{ m}^2} = 4 \text{ m} - 3 \text{ m} = 1 \text{ m}.$$

$$25 \text{ m}^2 - 16 \text{ m}^2 = 9 \text{ m}^2.$$

$$\sqrt{9 \text{ m}^2} = 3 \text{ m}.$$

Lekcja 37.

30.11.37.

9.) $h = 2 \text{ decm}$ $r = 4 \text{ decm}$.

10.) $V_{\text{od}} = ?$

$$V_{\text{od}} = V - f$$

$$V = \frac{1}{3} CR$$

$$V = \frac{2 R \pi h \cdot R}{3}$$

$$f = \frac{1}{3} r^2 \pi (R - h)$$

$$V_{\text{od}} = \frac{2 R^2 \pi h - (R r^2 \pi - h r^2 \pi)}{3}$$

$$V_{\text{od}} = \frac{2 R^2 \pi h - R r^2 \pi + h r^2 \pi}{3}$$

$$V_{\text{od}} = \frac{\pi}{3} (2 R^2 h - R r^2 + h r^2)$$

$$R^2 = (R - h)^2 + r^2$$

$$R^2 = R^2 - 2 R h + h^2 + r^2$$

$$2 R h - h^2 - r^2 = 0$$

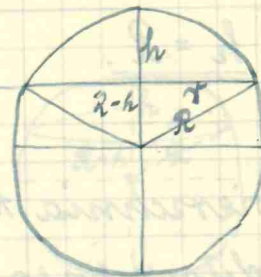
$$2 R h = h^2 + r^2$$

$$R = \frac{h^2 + r^2}{2 h}$$

$$V_{\text{od}} = \frac{\pi}{3} \left(2 h \frac{r^4 + 2 r^2 h^2 + h^4}{2 h^2} - \frac{r^4 + r^2 h^2}{2 h} + r^2 h \right)$$

$$V_{\text{od}} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{r^4 + 2 r^2 h^2 + h^4}{h} - \frac{r^4 + r^2 h^2}{2} + 2 r^2 h \right)$$

$$V_{\text{od}} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{3 r^2 h^2 + h^4}{2 h} \right) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{3 r^2 h + h^3}{2} \right)$$



$$V_{\text{od}} = \frac{\pi h}{6} (3 r^2 + h^2)$$

$$\frac{3 \cdot 14 \cdot 2 \text{ decm}}{6} = \frac{3 \cdot 14}{3} \text{ decm} = 1.05 \text{ decm}$$

$$\frac{16 \text{ decm} \cdot 3}{48 \text{ decm}^2} + 4 \text{ decm} = 52 \text{ decm} \cdot 1.05 \text{ decm}$$

$$\frac{260}{54.68 \text{ decm}^3}$$

$$V_{\text{od}} = 54.6 \text{ decm}^3$$

Zadanie.

30.11.37.

- 18.) Promień kuli $R = 12 \text{ decm}$. W jakiej odległości od środka należy przeciąć tę kulę dwiema płaszczyznami, do siebie równoległymi i równo oddalonymi od środka kuli, aby powierzchnia pasa kulistego była równa sumie powierzchni obu jego podstaw.

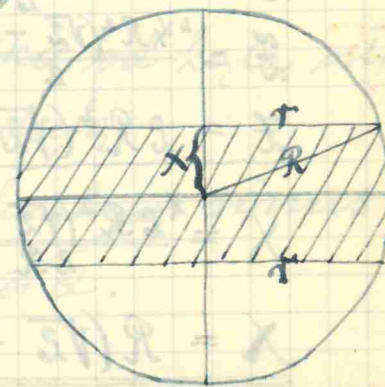
1.) R ; $q = 2 f$.

2.) x .

$$q = 2 f$$

$$2 R \pi \cdot 2 x = 2 r^2 \pi$$

$$4 R \pi x = 2 r^2 \pi$$



$$2Rx = r^2.$$

$$x = \frac{r^2}{2R}.$$

$$r^2 = R^2 - x^2.$$

$$r^2 = R^2 - \frac{r^4}{4R^2}.$$

$$r^2 + \frac{r^4}{4R^2} = R^2.$$

$$4R^2 r^2 + r^4 = 4R^2 R^2.$$

$$r^4 + 4R^2 r^2 - 4R^4 = 0.$$

$$z = r^2.$$

$$z^2 + 4R^2 z - 4R^4 = 0.$$

$$z = \frac{-4R^2 \pm \sqrt{16R^4 + 16R^4}}{2}.$$

$$z = \frac{-4R^2 + \sqrt{32}R^2}{2}.$$

$$z = \frac{-4R^2 + 4R^2\sqrt{2}}{2}.$$

$$z = \frac{4R^2(\sqrt{2} - 1)}{2}.$$

$$z = 2R^2(\sqrt{2} - 1) = r^2.$$

$$x = \frac{2R^2(\sqrt{2} - 1)}{2R}.$$

$$x = R(\sqrt{2} - 1).$$

$$0.41 \cdot 12 \text{ decm}$$

$$82$$

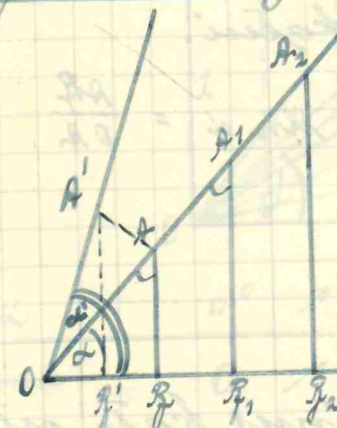
$$492 \text{ decm.}$$

$$x = 4.92 \text{ decm.}$$

Lekcja 38.

1. 37.

Funkcje trygonometryczne (goniometryczne) kąta ostryego.



$$\frac{AA'}{OA} = \frac{A_1P_1}{OA_1} = \frac{A_2P_2}{OA_2} = \dots$$

$$\frac{A'A'}{OA'} > \frac{AA'}{OA}.$$

$$OA' = OA.$$

$$\frac{AA'}{OA} = \sin \alpha.$$

Długości boków trójkątów prostokątnych o kącie ostrym α nie zależą od długości boków.

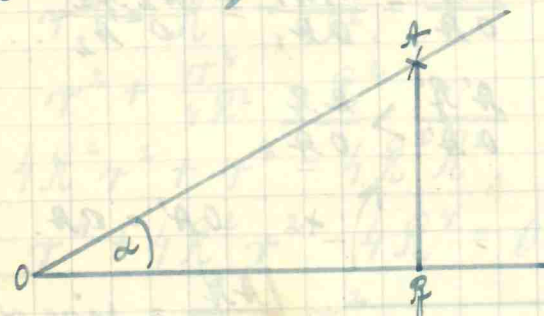
Stosunek ten zależy tylko od kąta ostryego α , czyli jest jego funkcją.

Funkcja ta nazywana jest funkcją sinus (wstawa) tego kąta ostryego α .

Lekcja 39.

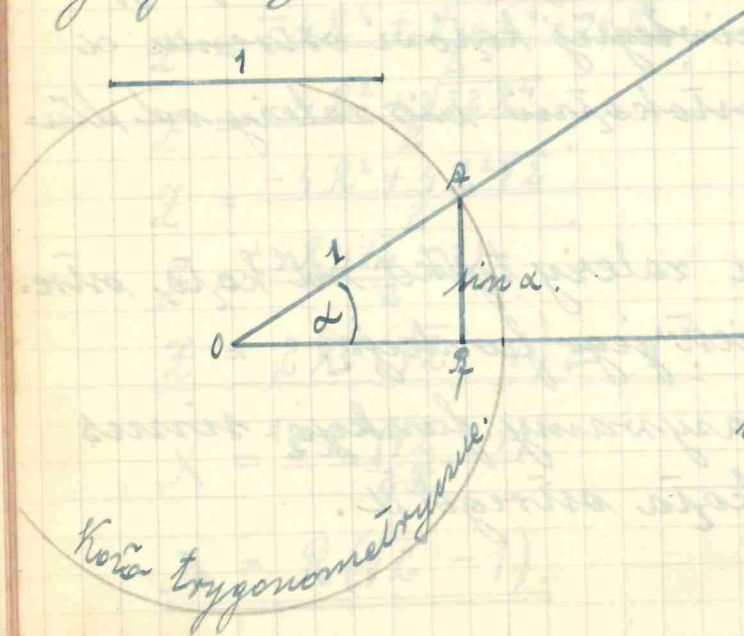
5.V.37.

Funkcja sinus kąta ostrego jest to stosunek przyprostokątnej przeciwległej temu kątowi do przeciwprostokątnej.



$$\sin \alpha = \frac{AP}{BP}$$

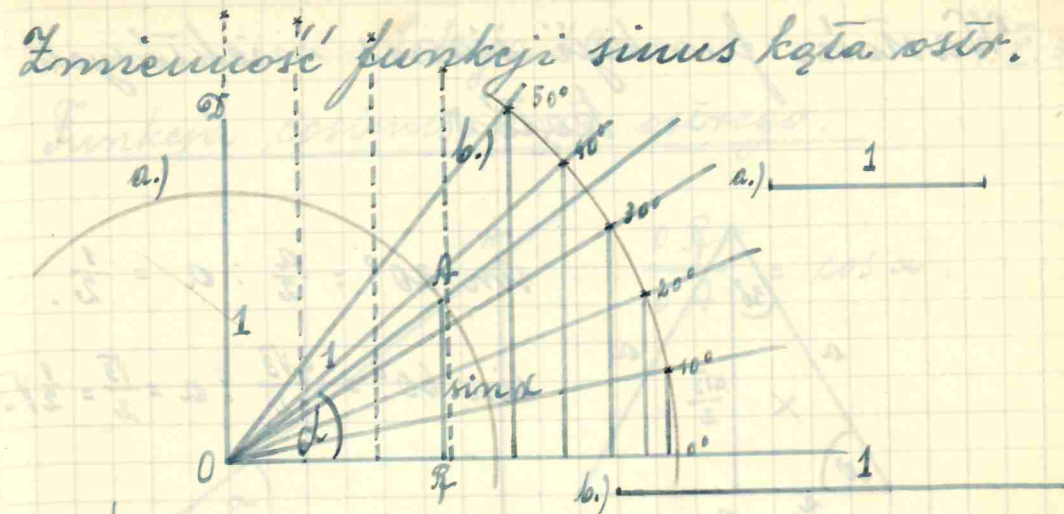
Przedstawianie funkcji sinus kąta ostrego jedynemu odcinkiem.



$$\sin \alpha = \frac{AP}{BP} = \frac{AP}{1} = AP$$

Kość trygonometryczna

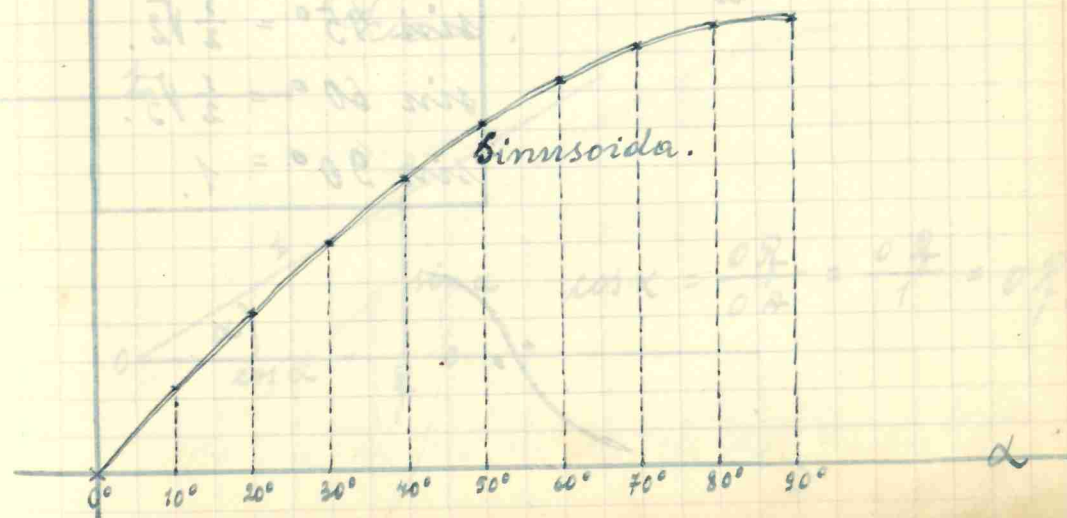
Zmianyłość funkcji sinus kąta ostrego.



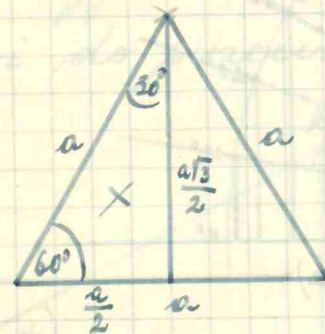
α	0°	$\nearrow$	90°
$\sin \alpha$	0	$\nearrow$	1

Wykres funkcji sinus.

b) $\sin \alpha$

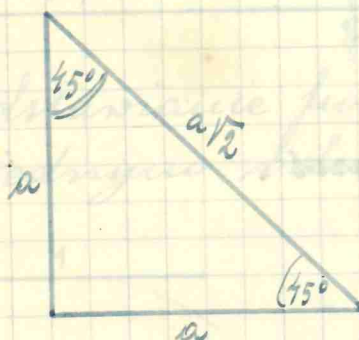


Wartości funkcji sinus niektórych kątów.



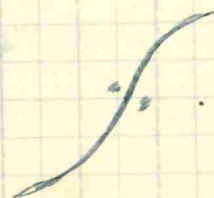
$$\sin 30^\circ = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}.$$

$$\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$



$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

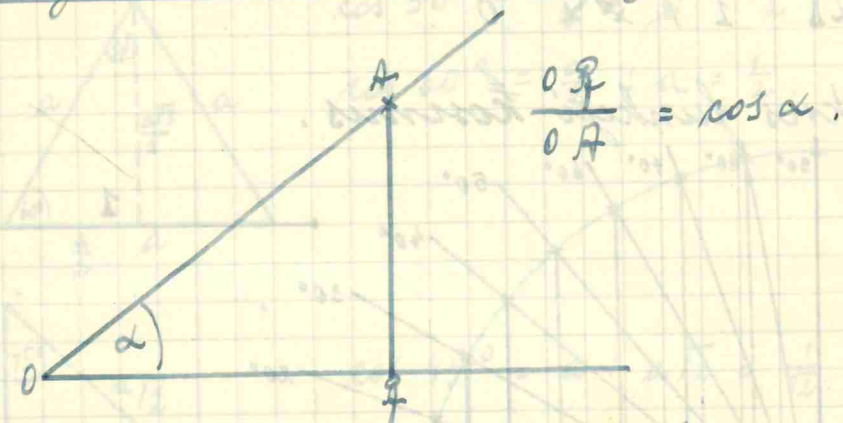
$\sin 0^\circ = 0.$
$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$
$\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$
$\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$
$\sin 90^\circ = 1.$



Lekcja 40.

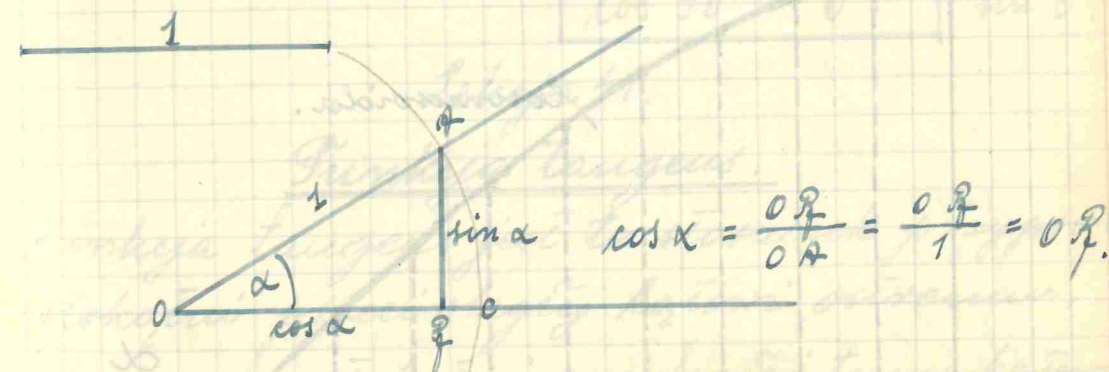
7. V. 37.

Funkcja cosinus kąta ostrego.



Funkcja cosinus kąta ostrego jest to stosunek przyprostokątnej przyległej do tego kąta ostrego do przeciwprostokątnej.

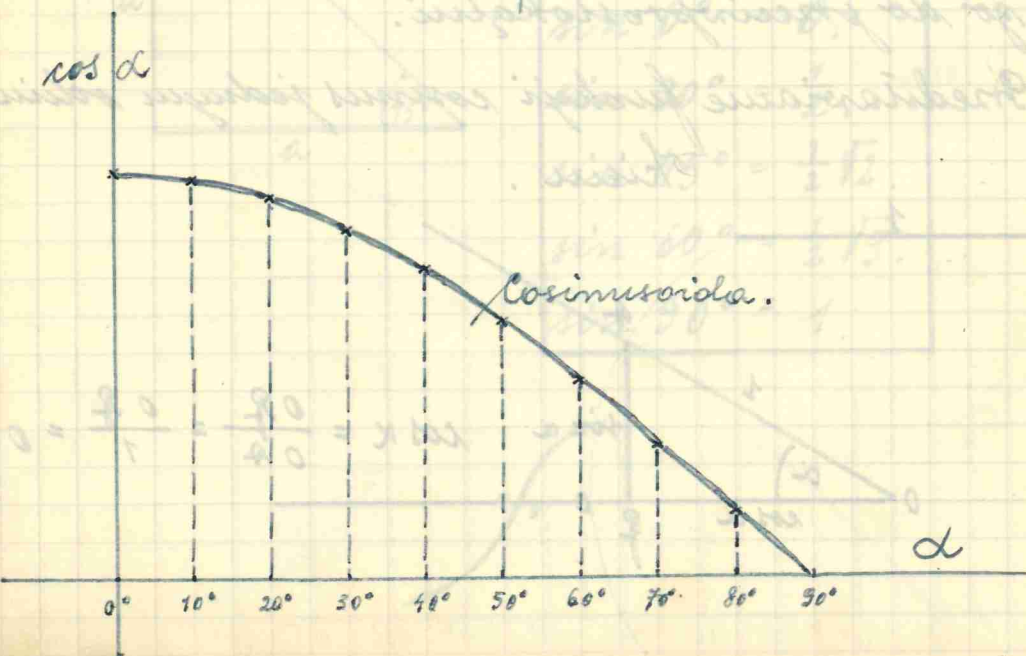
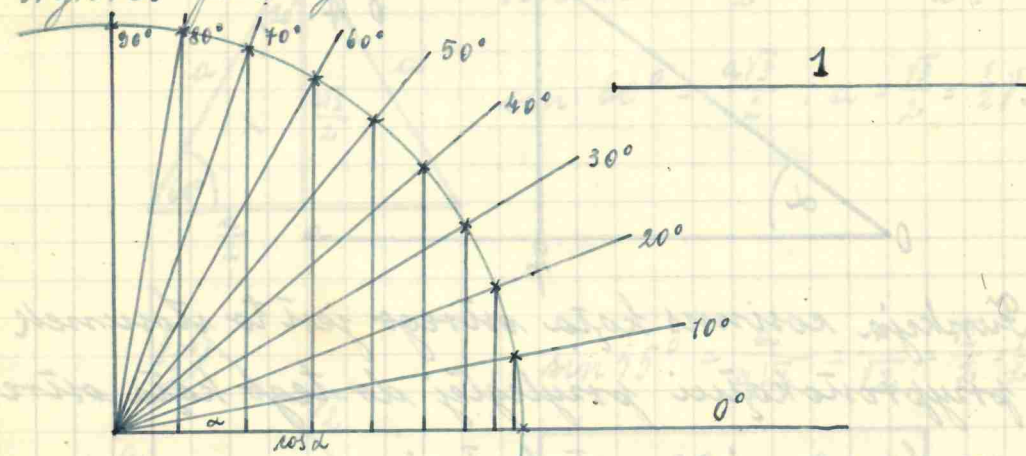
Przedstawiamie funkcję cosinus jedynemu odmiennemu.



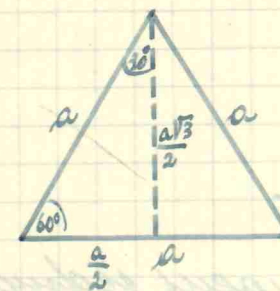
Zmiany wartości funkcji cosinus.

α	0°	90°
$\cos \alpha$	1	0

Nyktres funkcji cosinus.

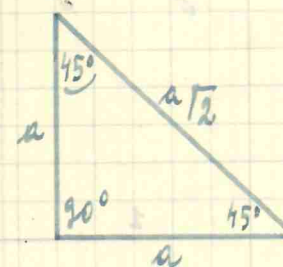


Wartości funkcji cosinus niektórych kątów.



$$\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2}.$$



$$\cos 45^\circ = a : a\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

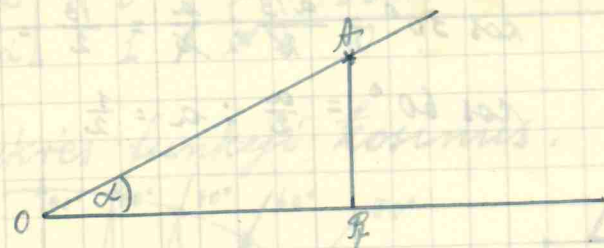
$\cos 0^\circ = 1.$	$= \sin 90^\circ.$
$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$	$= \sin 60^\circ.$
$\cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$	$= \sin 45^\circ.$
$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$	$= \sin 30^\circ.$
$\cos 90^\circ = 0.$	$= \sin 0^\circ.$

Lekcja 41.

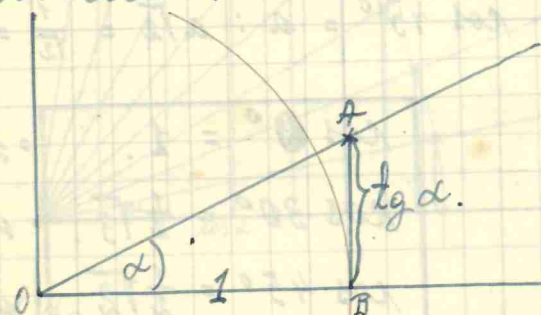
Funkcja tangens.

Funkcja tangens jest to stosunek przyprostokątnej przeciwległej kątom ostrym, do przyprostokątnej przyległej temu kątowi.

$$\text{tang } \alpha = \frac{AP}{OP}$$



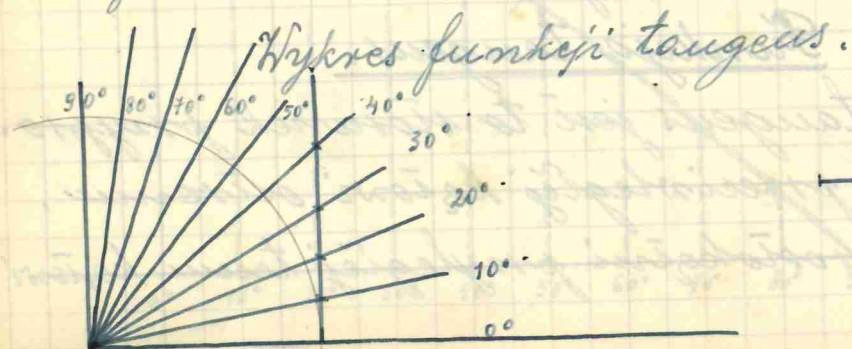
Przedstawienie funkcji tangens jednostkowego odcinka.



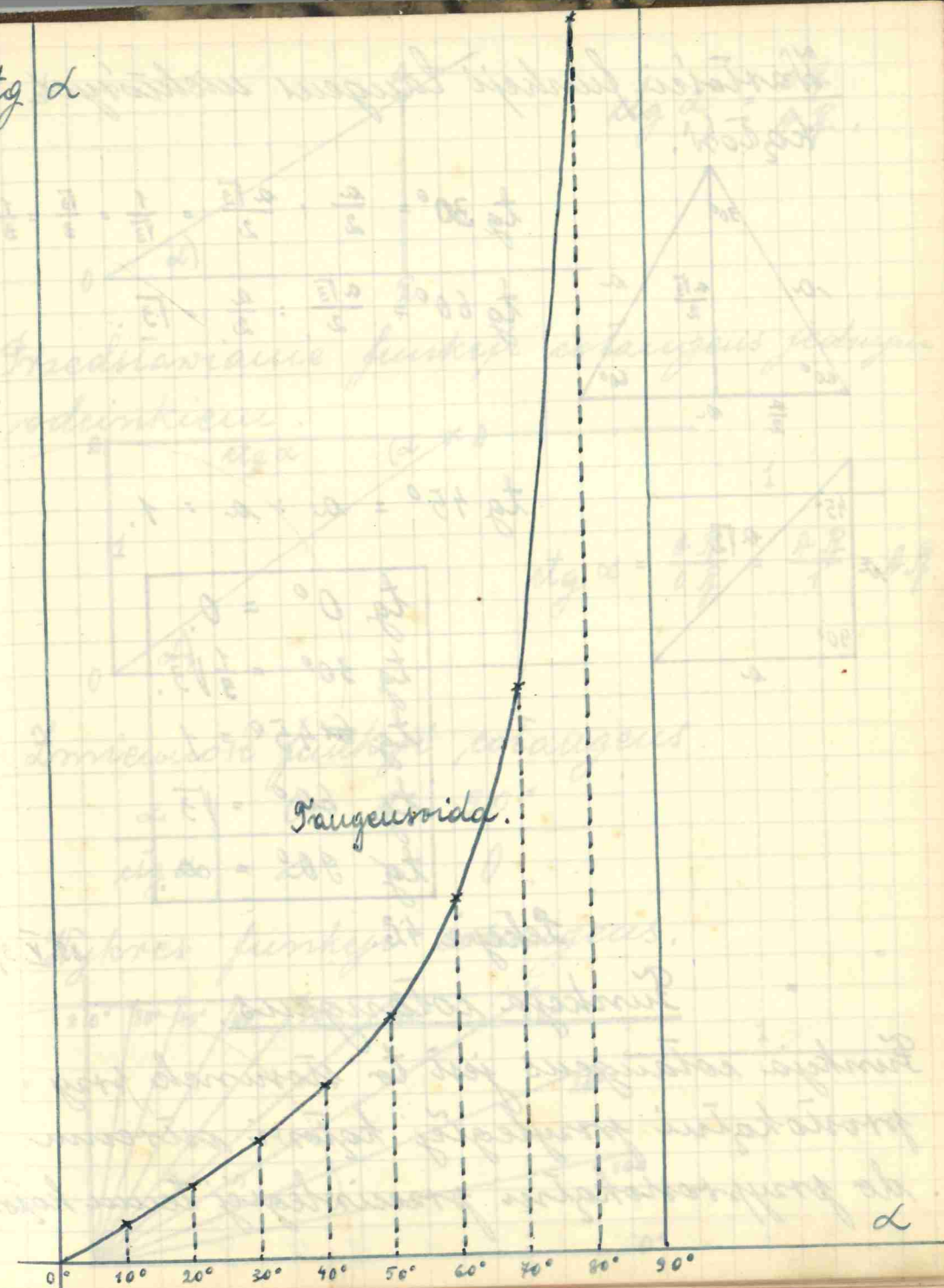
$$\text{tg} = \frac{AP}{OP} = \frac{AP}{1} = AP$$

Zmiana funkcji tangens.

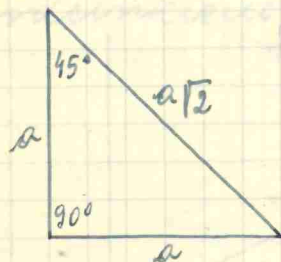
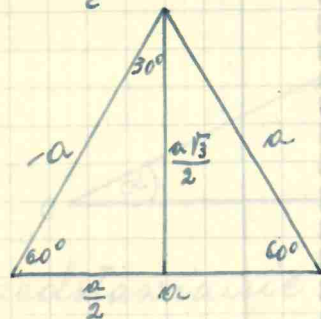
α	0°	$\nearrow$	90°
$\text{tg } \alpha$	0	$\nearrow$	∞



$\text{tg } \alpha$



Wartości funkcji tangens niektórych kątów.



$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{3}.$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = a : a = 1.$$

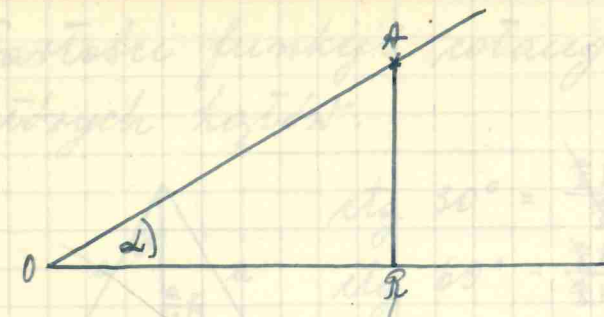
$\operatorname{tg} 0^\circ = 0.$
$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$
$\operatorname{tg} 45^\circ = 1.$
$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$
$\operatorname{tg} 90^\circ = \infty.$

Lekcja 42.

29. V. 37.

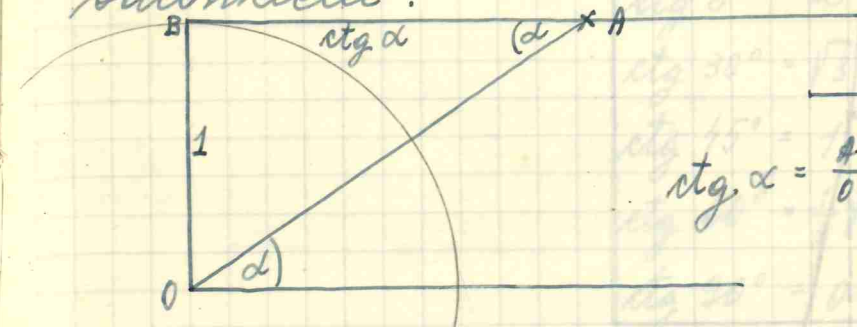
Funkcja cotangens.

Funkcja cotangens jest to stosunek przyprostokątnej przyległej do kąta ostrego do przyprostokątnej przeciwległej temu kątowi.



$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{OP}{AP}.$$

Przedstawienie funkcji cotangens jednym odcinkiem.

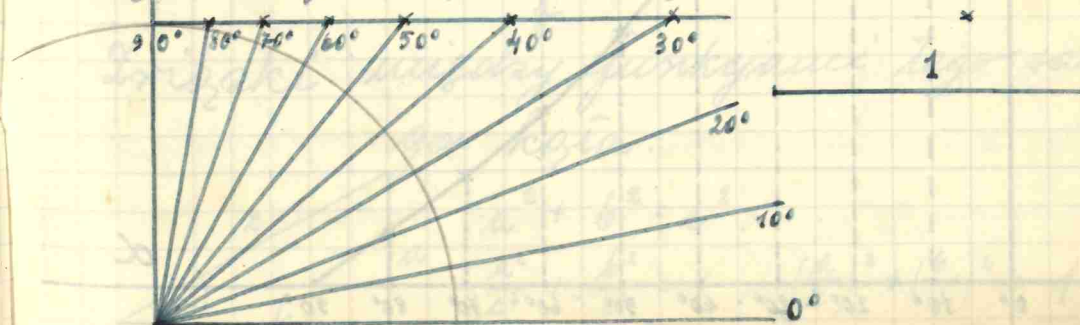


$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{AP}{OP} = \frac{AP}{1} = AP.$$

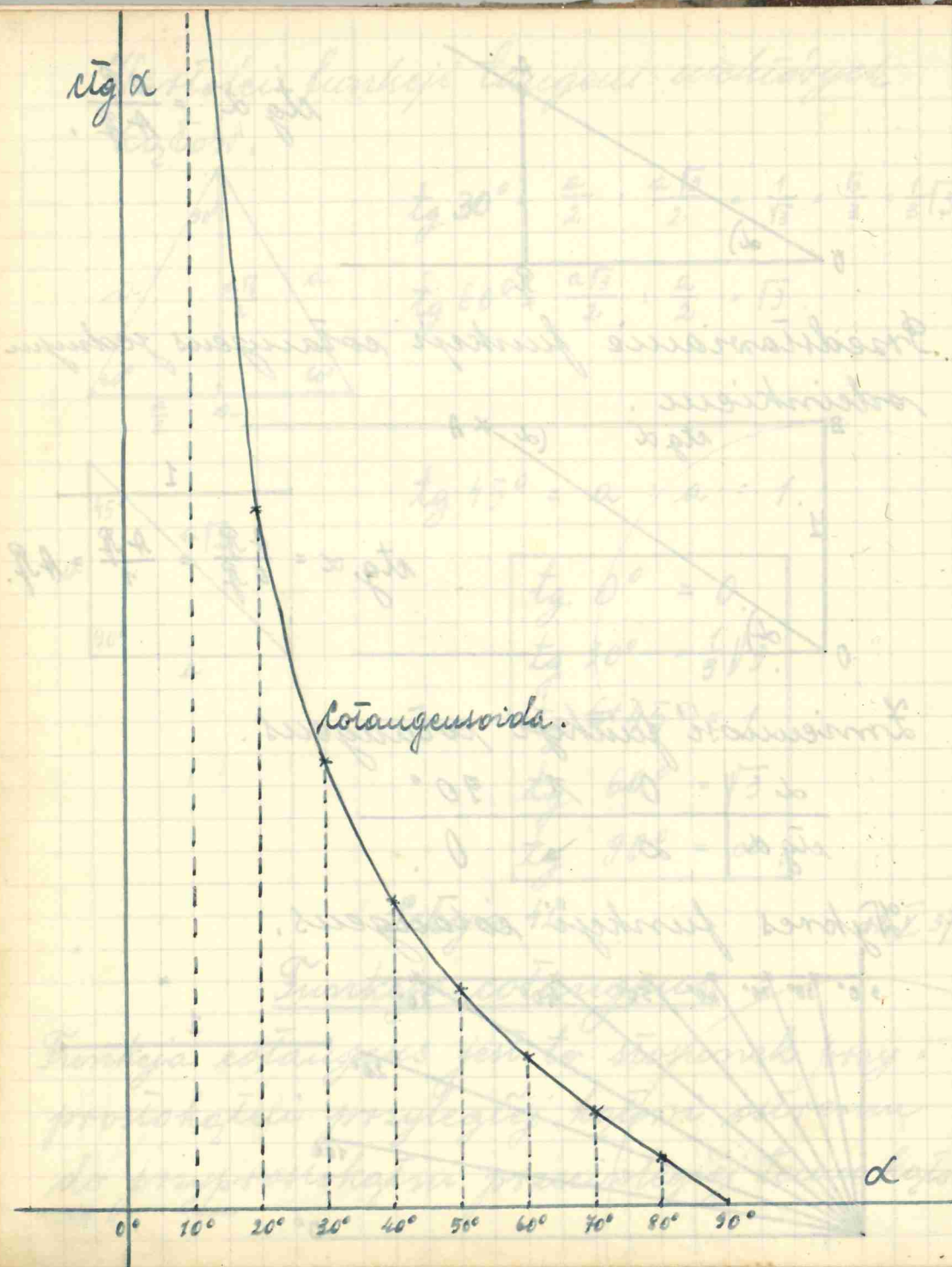
Zmienność funkcji cotangens.

α	0	$\nearrow$	90°
$\operatorname{ctg} \alpha$	∞	$\searrow$	0

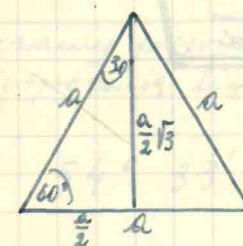
Lukres funkcji cotangens.



ctg α



Wartości funkcji cotangens dla niektórych kątów.

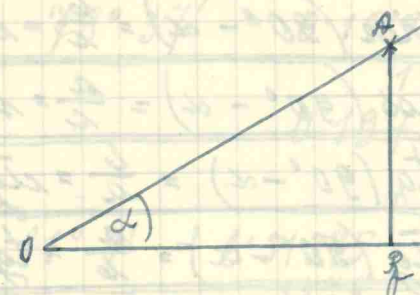


$$\text{ctg } 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}.$$

$$\text{ctg } 60^\circ = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

$$\text{ctg } 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$

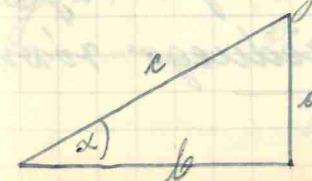
$\text{ctg } 0^\circ = \infty$	$= \text{tg } 90^\circ$
$\text{ctg } 30^\circ = \sqrt{3}$	$= \text{tg } 60^\circ$
$\text{ctg } 45^\circ = 1$	$= \text{tg } 45^\circ$
$\text{ctg } 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$= \text{tg } 30^\circ$
$\text{ctg } 90^\circ = 0$	$= \text{tg } 0^\circ$



$$\frac{OA}{OP} = \text{cosecans}.$$

$$\frac{OA}{AP} = \text{secans}.$$

Trójkąty utworzone funkcjami tego samego kąta.



$$a^2 + b^2 = c^2.$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1. \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \\ \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} \end{cases}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

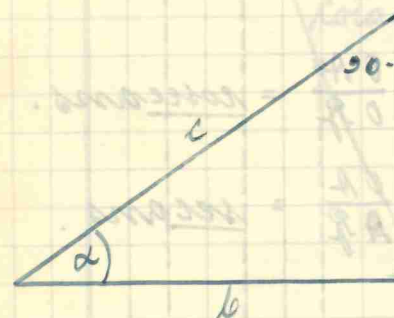
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

Lekcja 43.

2. IV. 37.

Funkcje trygonometryczne
kątów dopełniających.



$$\begin{cases} \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos \alpha. \\ \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin \alpha. \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha. \\ \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha. \end{cases}$$

Dzwy kątach dopełniających funkcje jedne-
go z nich równają się co-funkcyjom
drugiego, a co-funkcje jednego równają
się funkcjom drugiego.

$$\sin 65^\circ 27' = 0.90875$$

$$\begin{array}{r} 85 \text{ popr.} \\ 0.90960. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.90996 \\ 0.90875 \\ \hline 10' - = 12.1 \\ 1' - = 12.1 \\ 7' - = 12.1.7 \\ \hline 84.7 \end{array}$$

Obliczamy poprawkę przez
interpolację liniową.

$$\cos 54^\circ 33' = 0.58040$$

$$\begin{array}{r} 71 \\ 0.57959. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.58040 \\ 0.57833 \\ \hline 10' - = 23.7 \\ 1' - = 23.7 \\ 3' - = 23.7.3 \\ \hline 71.1 \end{array}$$

Zadanie.

8. IV. 37.

$$\sin 42^\circ 13' = 0.67129$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ 0.67193. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.67344 \\ 0.67129 \\ \hline 10' - = 21.5 \\ 1' - = 21.5 \\ 3' - = 21.5.3 \\ \hline 64.5 \end{array}$$

$$\cos 78^\circ 37' = 0.19937$$

$$\begin{array}{r} 199 \\ 0.19738. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.19937 \\ 0.19652 \\ \hline 10' - = 28.5 \\ 1' - = 28.5 \\ 7' - = 28.5.7 \\ \hline 199.5 \end{array}$$

$$\operatorname{tg} 81^\circ 7' = 6.31375$$

$$\begin{array}{r} 8476 \\ 6.39851. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6.43484 \\ 6.31375 \\ \hline 10' - = 1210.9 \\ 1' - = 1210.9 \\ 7' - = 1210.9.7 \\ \hline 8476.3 \end{array}$$

$$\operatorname{ctg} 24^\circ 6' = 0.44523$$

$$\begin{array}{r} 0.224604 \\ 1037 \\ 2.23567. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.44523 \\ 2.24604 \\ 2.22875 \\ \hline 10' - = 172.9 \\ 1' - = 172.9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6' - 172.9.6 \\ 1037.4 \end{array}$$

Lekcja 44.

9. VI. 37.

$$\sin \alpha = 0.66584 \neq$$

480

104 : 21.7

$$\alpha = 41^{\circ}40'$$

1040 : 217 = 5'

+ 5'

41^{\circ}45'

$$\operatorname{ctg} \alpha = 0.76495$$

272

223 : 46.1

$$\alpha = 52^{\circ}40'$$

2230 : 461 = 5'

- 5'

52^{\circ}35'

0.66697

0.66480

10' - = 217

1' - = 21.7

0.76733

0.76272

10' - = 461

1' - = 46.1

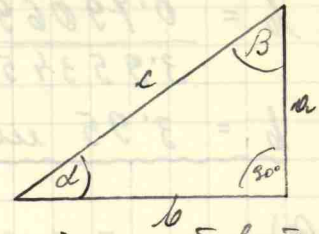
Rozwiązanie trójkąta prostokątnego.

Rozwiązać trójkąt znaczy to, na podstawie danych elementów takich, które trójkąt wyznaczają w zupełności, obliczyć pozostałe elementy.

Trójkąt prostokątny wyznaczają: 1.) przyprostokątne i kąt ostry, 2.) przeciwprostokątne i kąt ostry, 3.) obie przyprostokątne, 4.) przyprostokątne i przeciwprostokątne.

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha = \cos \beta.$$

$$I. \quad a = c \sin \alpha = c \cos \beta.$$



Przyprostokątne równa się przeciwprostokątnej pomnożonej albo przez sinus kąta przeciwległego, albo przez cosinus kąta przyległego.

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta.$$

$$II. \quad a = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{ctg} \beta.$$

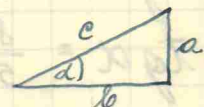
Przyprostokątne równa się drugiej przyprostokątnej pomnożonej albo przez tangens kąta przeciwległego, albo przez cotangens kąta przyległego.

Lekcja 45.

11. VI. 37.

$$D. \quad c = 5 \text{ m}; \quad \alpha = 37^{\circ}45'$$

$$Sz. \quad b = ?$$



$$b = a \operatorname{ctg} \alpha.$$

0.79158

89

$$b = c \cos \alpha.$$

0.79069

$$b = 5 \cdot \cos 37^{\circ}45'.$$

0.79158

0.78980

10' - = 178

1' - = 17.8.5

5' - = 89.0

$$b = \frac{0.79069 \cdot 5}{3.95345}$$

$$b = 3.95 \text{ m.}$$

g.) $\alpha = 50^\circ 12'$ $b = 40.8 \text{ m.}$

h.) $a = ?$

$$a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$a = 40.8 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ 12'$$

$$a = 40.8 \cdot 1.2$$

$$\begin{array}{r} 816 \\ 48.96 \end{array}$$

$$a = 48.96 \text{ m.}$$



$$1.19882$$

$$1.20593$$

$$142$$

$$1.19882$$

$$1.20024$$

$$1.19882$$

$$1'$$

$$711.2$$

$$2'$$

$$142.2$$

g.) $a = 80 \text{ m.}$ $b = 50 \text{ m.}$

h.) $\alpha = ?$

$$a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{80}{50} = 1.60000$$

$$59.002$$

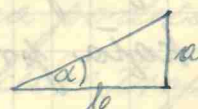
$$= 9980 : 1037 = 9.7'$$

$$\alpha = 57^\circ 50'$$

$$+ 10'$$

$$57^\circ 60'$$

$$\alpha = 58^\circ$$



$$1.60033$$

$$1.59002$$

$$10' - = 1031$$

$$1' - 1031$$

gł. Vm.

$b = 0.79059$
 59.5319
 $b = 5.95$ m

9) $\alpha = 50^\circ 12'$ $b = 40.8$ m

10) $\alpha = 2$

$a = b \cdot \tan \alpha$

$a = 40.8 \cdot \tan 50^\circ 12'$

$a = 40.8 \cdot 1.2$

48.96

48.96

$a = 48.96$ m

11) $a = 50$ m $b = 50$ m

12) $\alpha = 2$

$a = b \cdot \tan \alpha$

$\tan \alpha = \frac{a}{b}$

$\tan \alpha = \frac{10}{50} = 0.2$

39.002

$\alpha = 57^\circ 50'$

99.80 103.9 9.7

$57^\circ 50'$

70.10

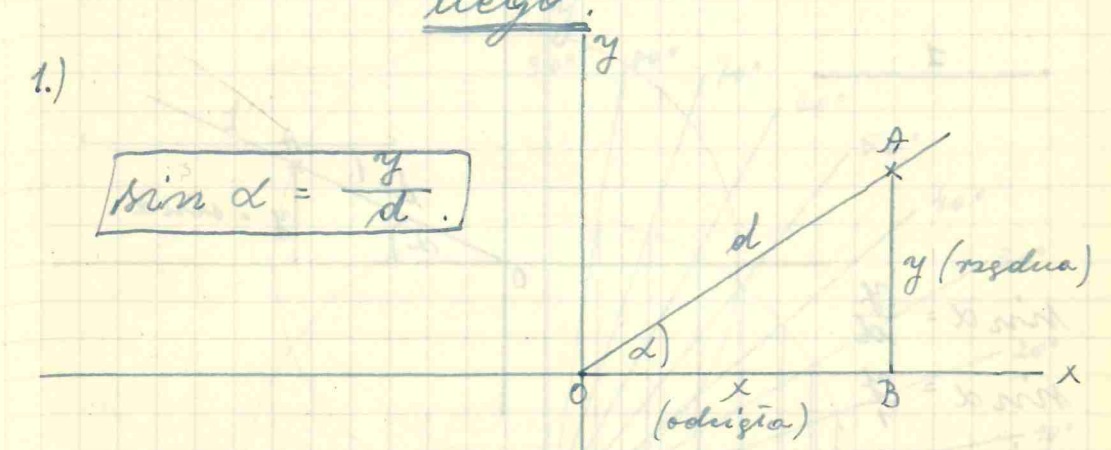
$57^\circ 50'$

$\alpha = 58^\circ$

Funkcje trygonometryczne kąta dowolnego.

1.)

$$\sin \alpha = \frac{y}{d}$$



Funkcja sinus dowolnego kąta jest to stosunek rzędnej dowolnego punktu obranego na ramieniu dowolnego kąta do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

2.) Znak funkcji sinus.

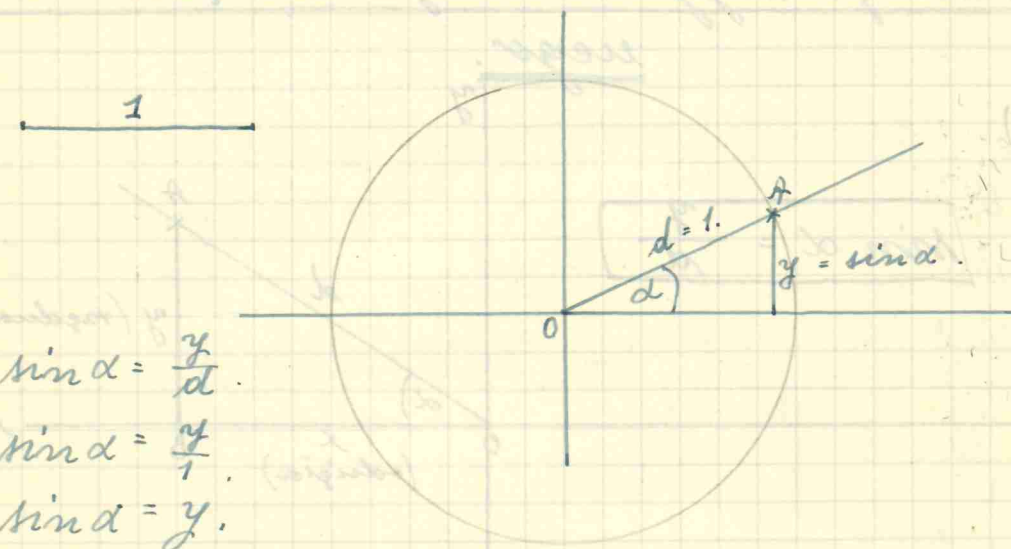
I, +

II, +

III, -

IV, -

3.) Sposób przedst. funkcji sin. jednym odcinkiem.



4.) Zmienność funkcji sinus.

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	1	0	-1	0

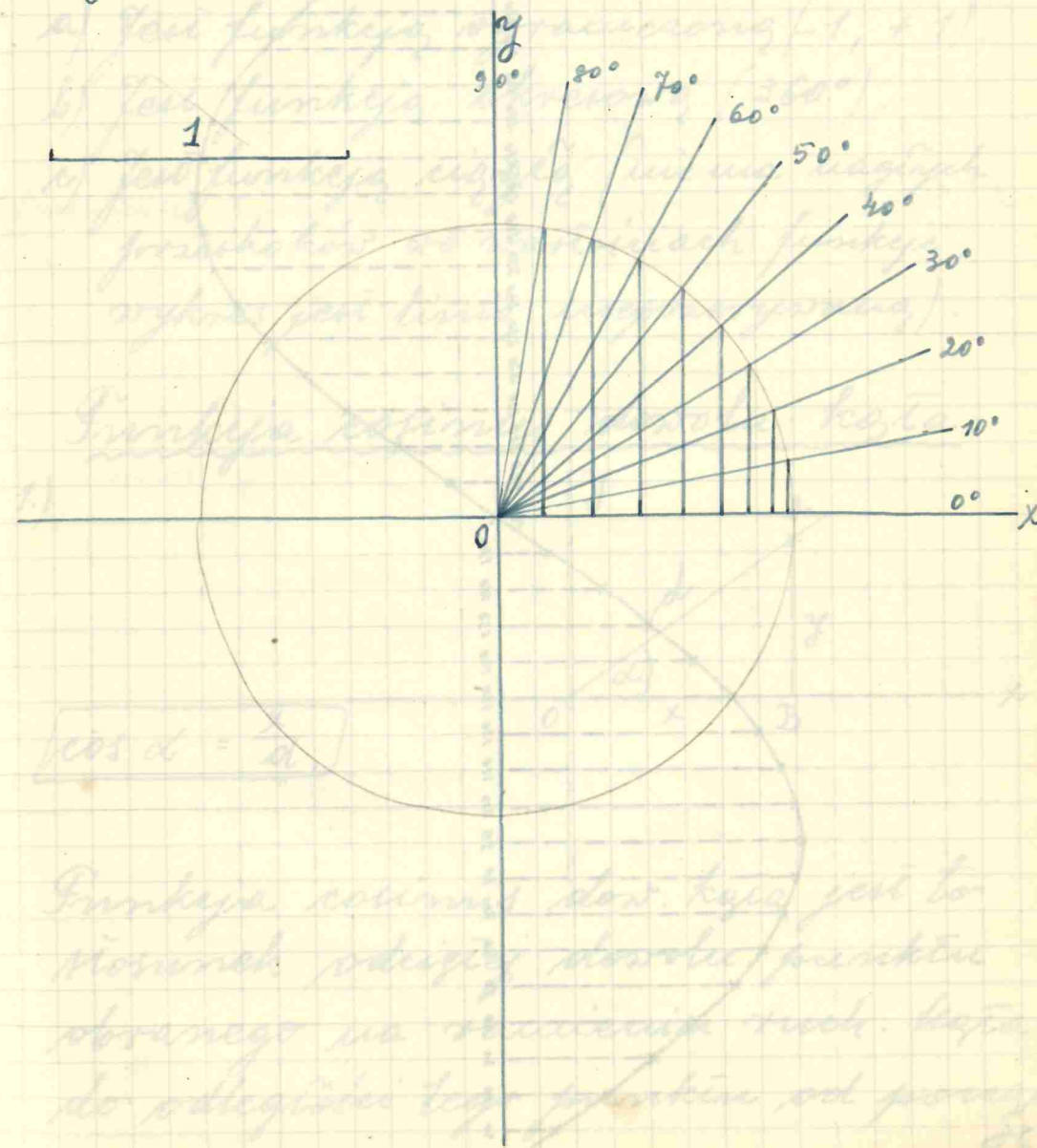
5.)

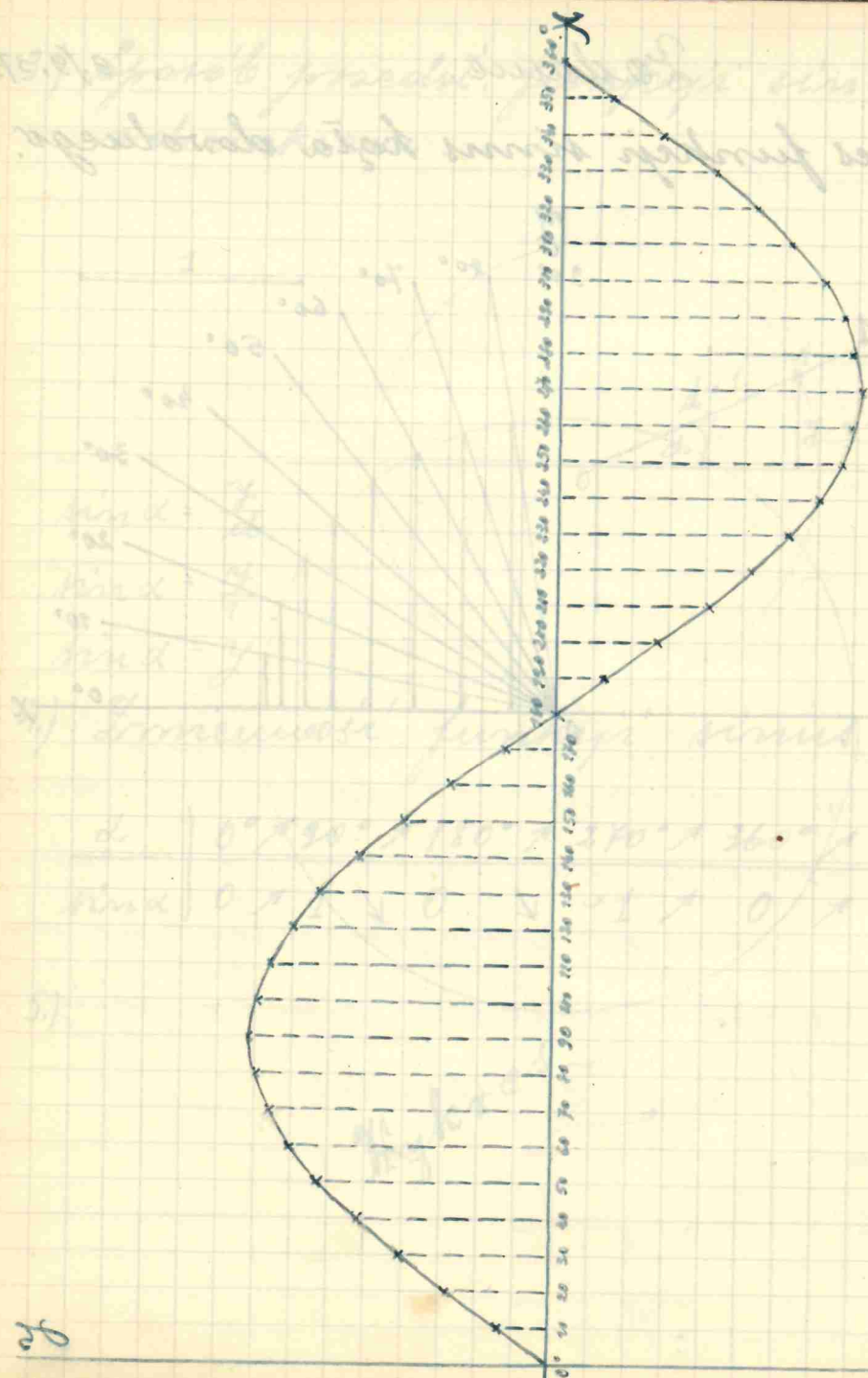
Wykres

Zadanie.

9.9.37.

5.) Wykres funkcji sinus kąta dowolnego.



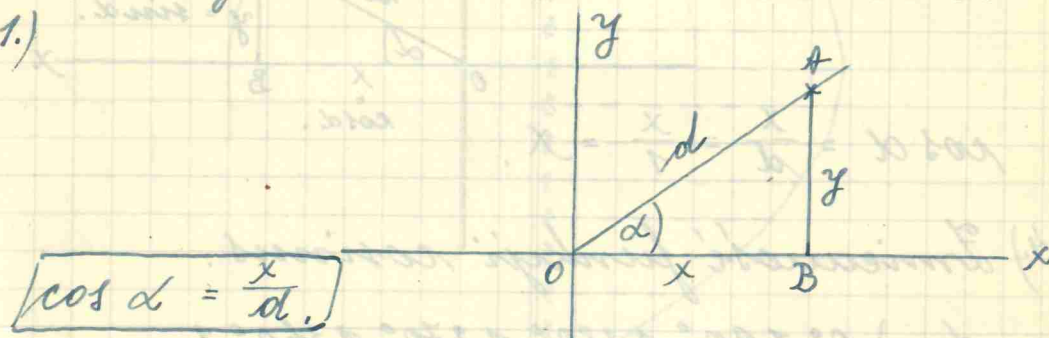


6.) Charakterystyka funkcji sinus.

- a) Jest funkcją ograniczoną $(-1, +1)$.
- b) Jest funkcją okresową (360°) .
- c) Jest funkcją ciągłą (nie ma nagłych przeskoków we wartościach funkcji, wykres jest linią nieprzerwaną).

Funkcja cosinus dowol. kąta.

1.)



$$\cos \alpha = \frac{x}{d}$$

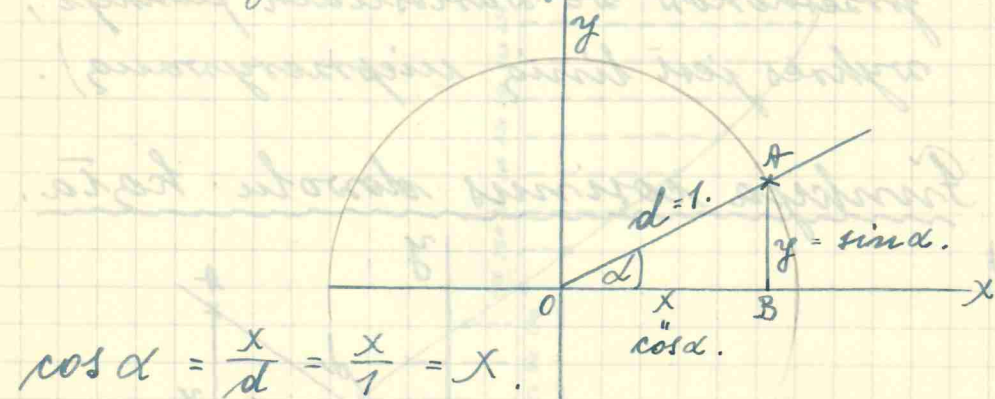
Funkcja cosinus dowol. kąta jest to stosunek odcinka dowol. punktu obranego na ramieniu such. kąta, do odległości tego punktu od początku.

ku układu współrzędnych.

2.) Znak funkcji cosinus.

$\frac{I}{II}, +$ $\frac{III}{IV}, -$
 $\frac{I}{II}, -$ $\frac{III}{IV}, +$

3.) Przechy. funk. cos. jednego odcinkiem



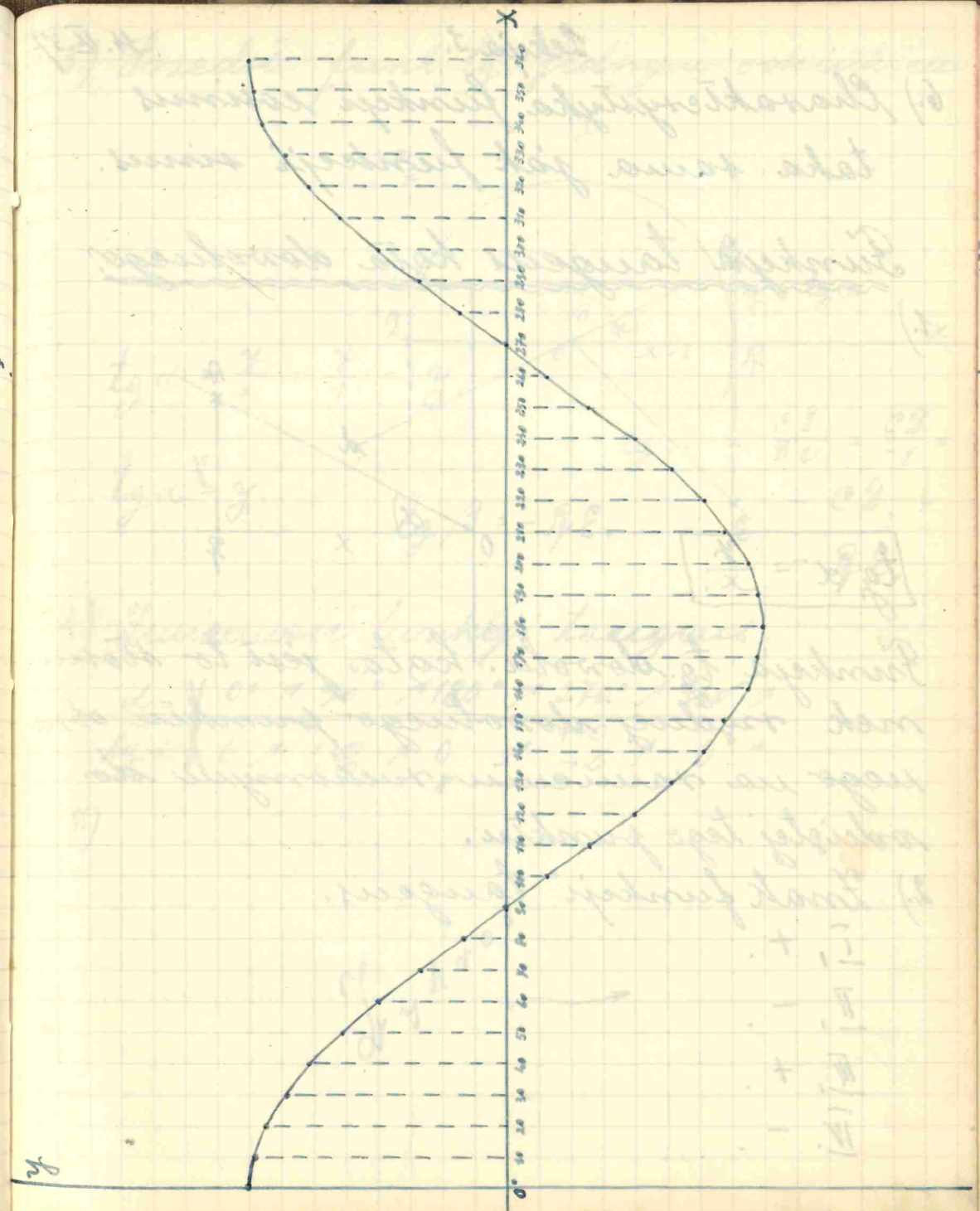
$$\cos \alpha = \frac{x}{d} = \frac{x}{1} = x.$$

4.) Zmienność funkcji cosinus.

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1

5.)

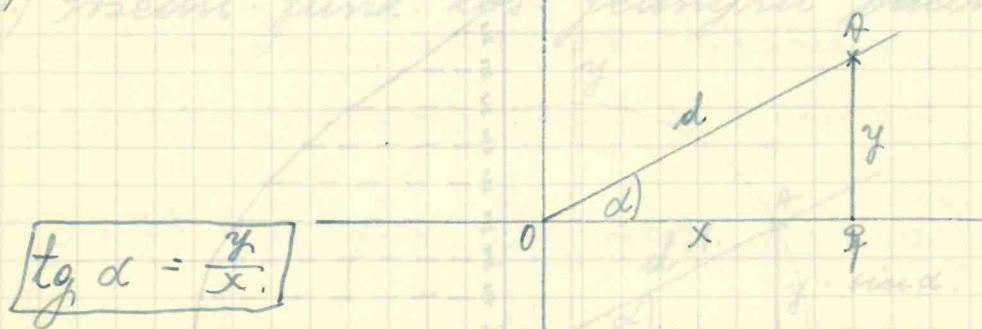
okres



6.) Charakterystyka funkcji cosinus
taka sama jak funkcji sinus.

Funkcja tangens kąta dowolnego.

1.) Przedst. funk. tg. jedynemu odcinkiem.



Funkcja tg. dowoln. kąta jest to stosunek przeciwk. dowolnego punktu obr. ugo na ramieniu ruchomym do odciętej tego punktu.

2.) Znak funkcji tangens.

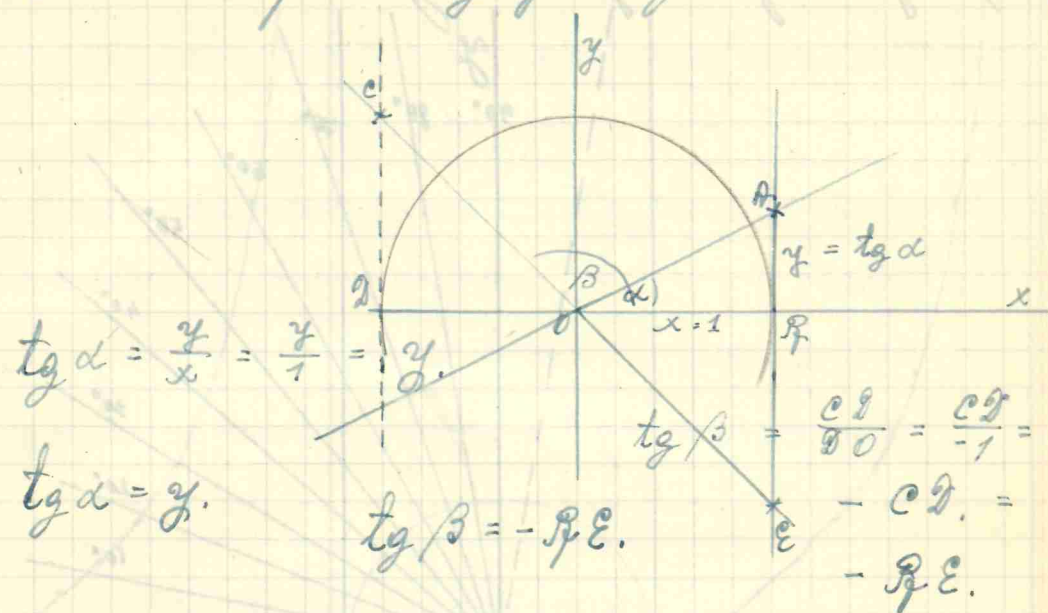
I, +

II, -

III, +

IV, -

3.) Przedst. funk. tg. jedynemu odcinkiem.



$$tg \alpha = \frac{y}{x} = \frac{y}{1} = y.$$

$$tg \alpha = y.$$

$$tg \beta = -PE.$$

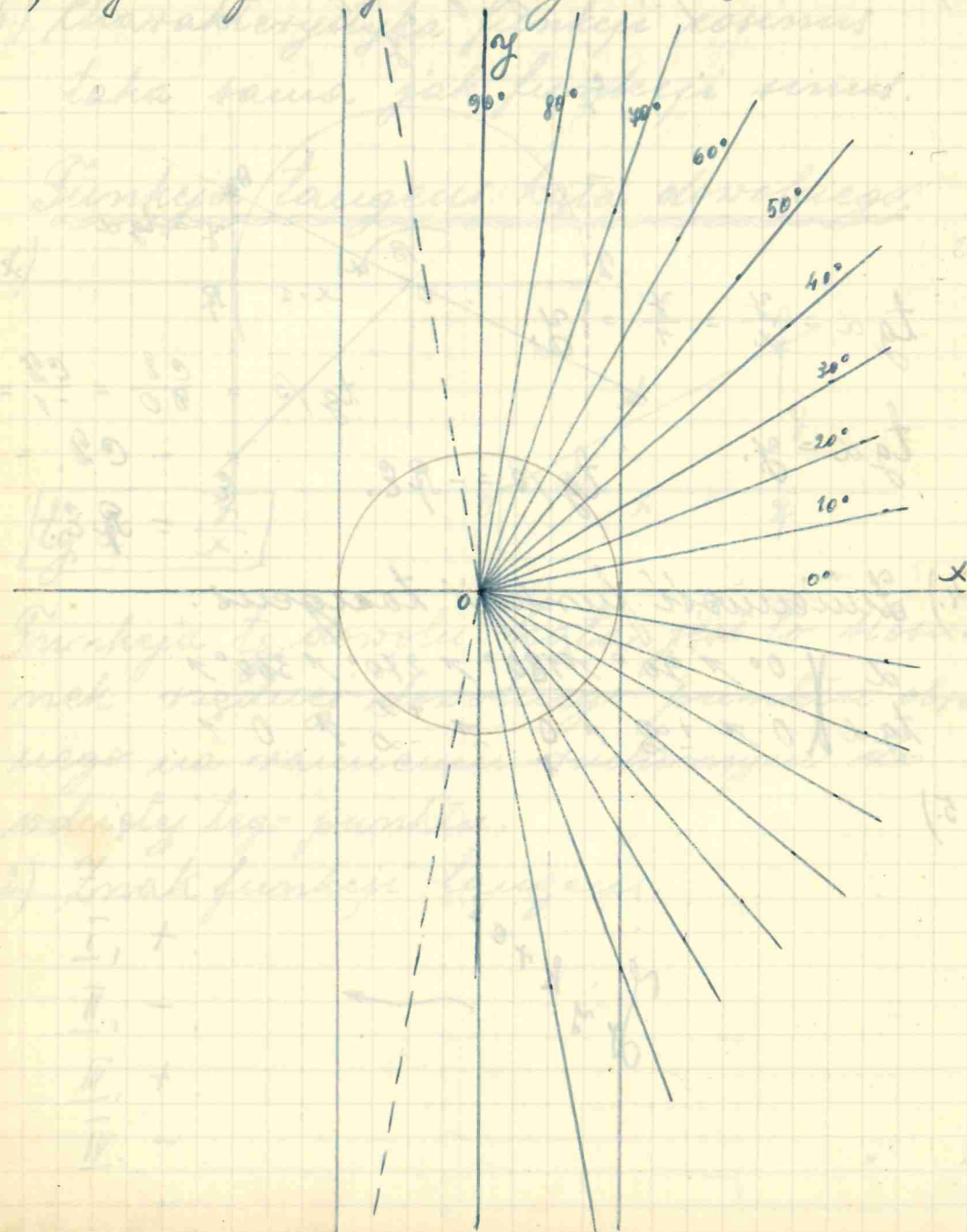
4.) Zmienność funkcji tangens.

α	0°	90°	180°	270°	360°
$tg \alpha$	0	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	0

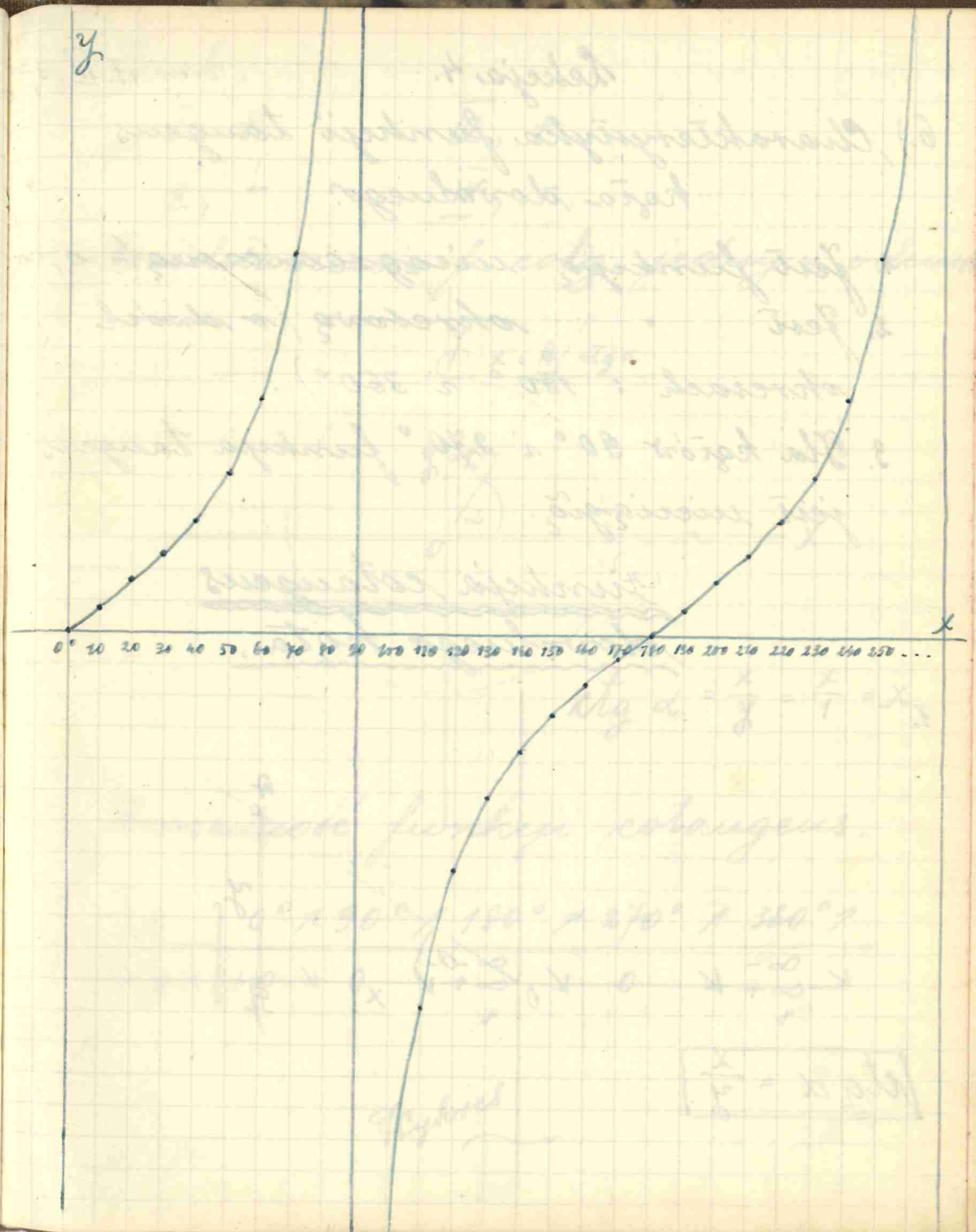
5.)

$tg \alpha = k \cdot x$

5.) Hykres funktiji tangens kosta lozolu.



y



Lekcja 4.

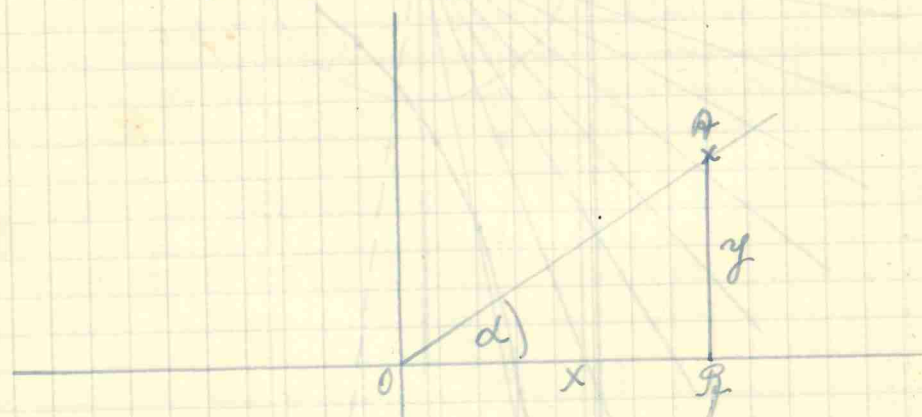
17. IX. 37.

6.) Charakterystyka funkcji tangens kąta dowolnego.

1. Jest funkcją nieograniczoną $(-\infty, +\infty)$.
2. Jest " okresową (o dwóch okresach: 180° i 360°).
3. Dla kątów 90° i 270° funkcja tangens jest nieciągła.

Funkcja cotangens
dowolnego kąta.

1.



$$\boxed{\text{ctg } \alpha = \frac{x}{y}}$$

2. Znak.

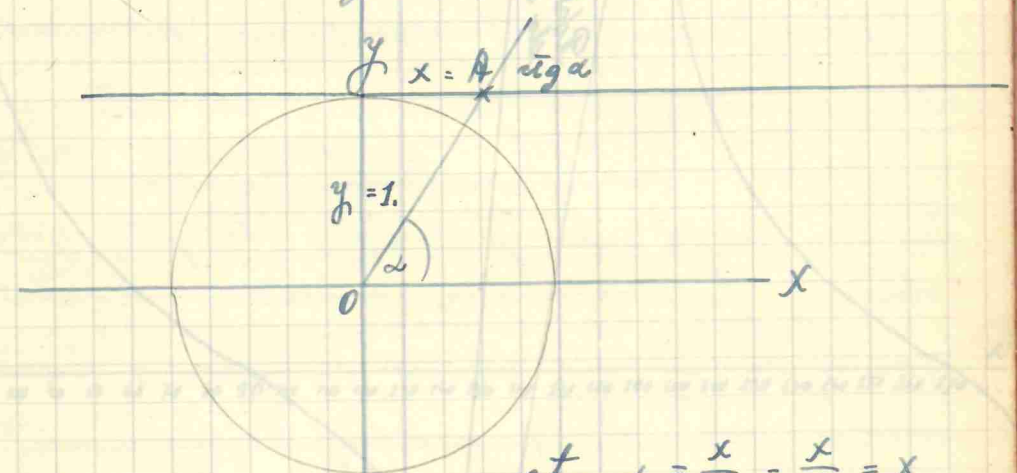
I, +

III, +

II, -

IV, -

3. Przedstawienie f. ctg. jednemu odcink.



$$\text{ctg } \alpha = \frac{x}{y} = \frac{x}{1} = x.$$

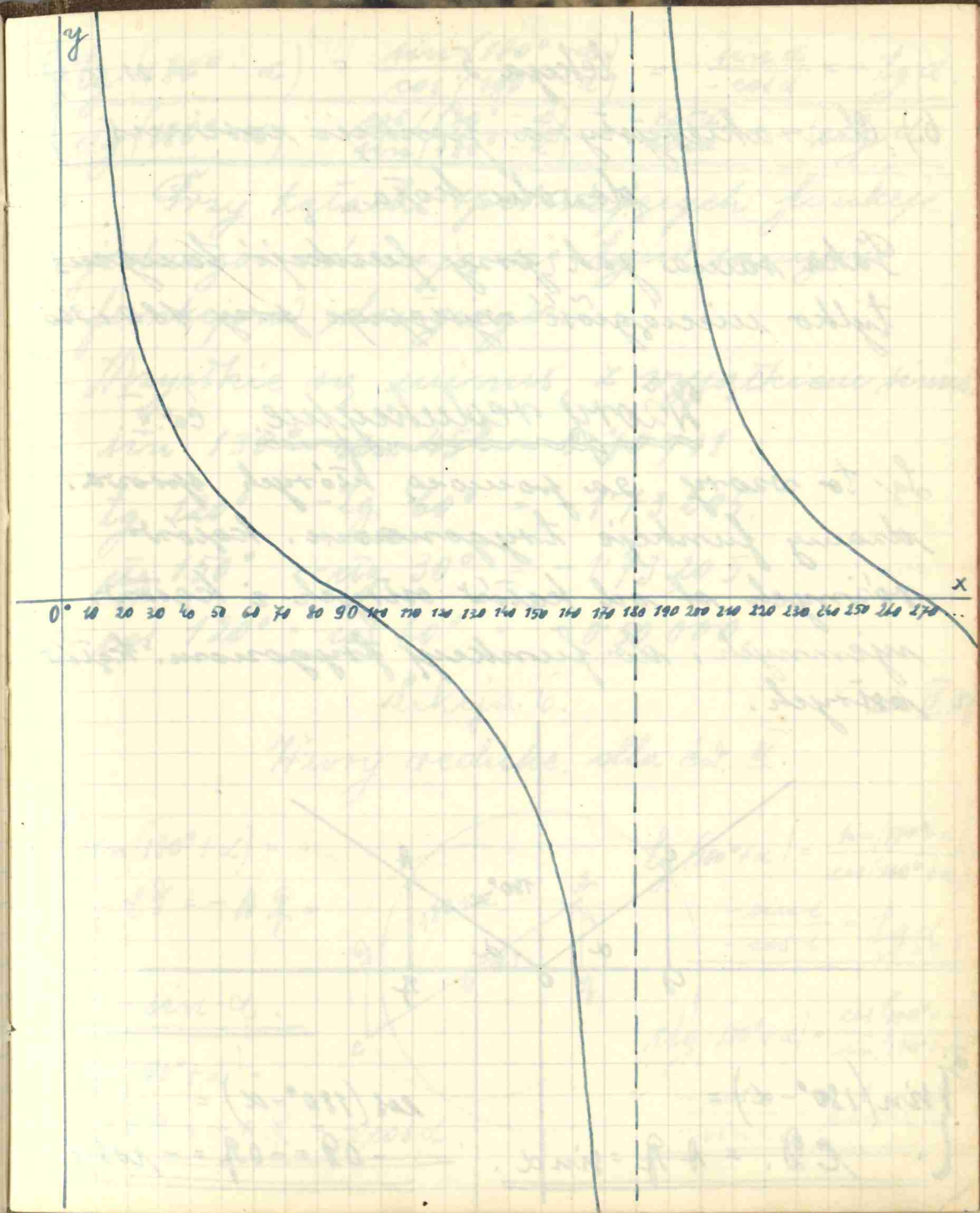
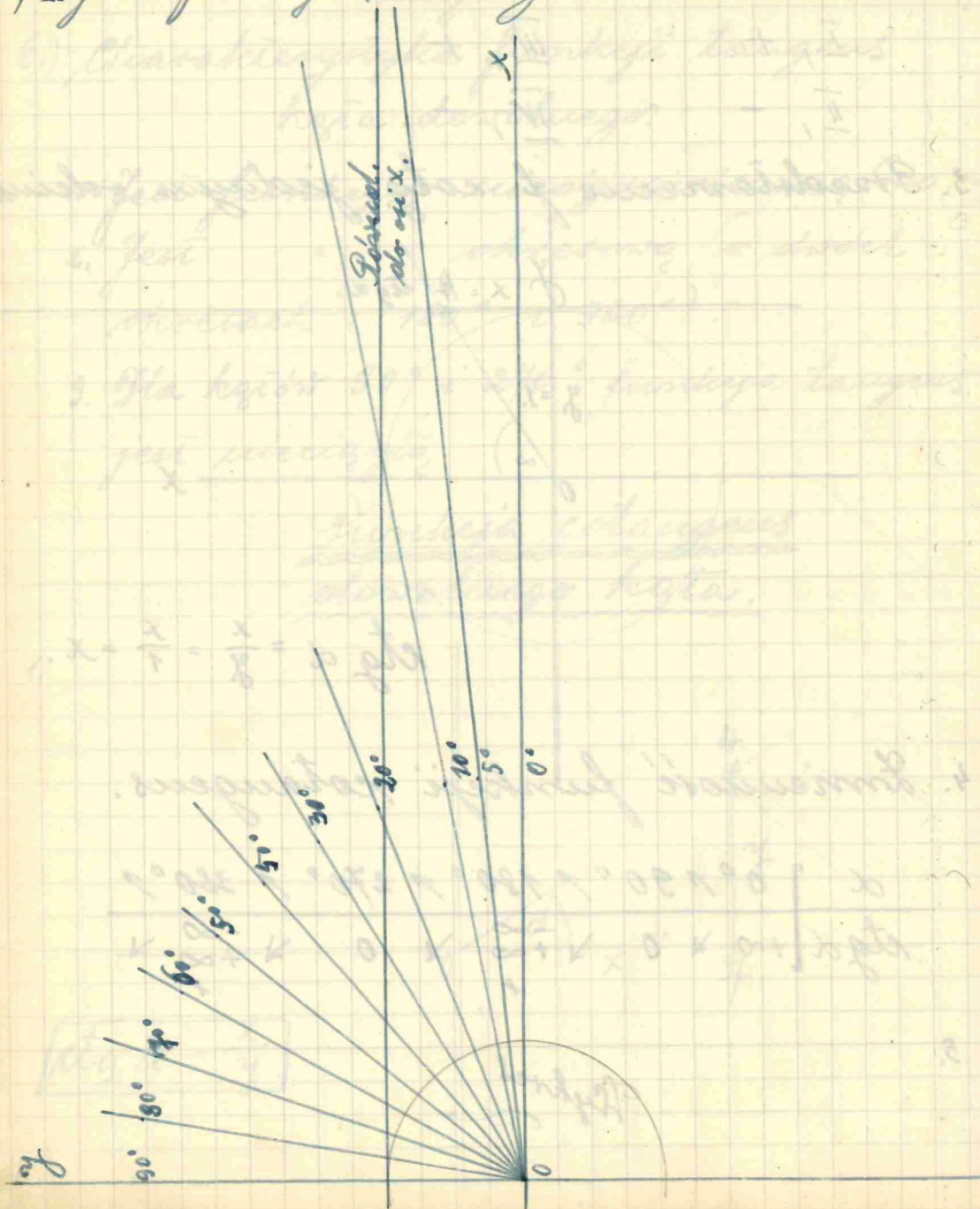
4. Zmienność funkcji cotangens.

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\text{ctg } \alpha$	$+\infty$	0	$+\infty$	0	$+\infty$

5.

Lykres

5.) Funkce funkce kotangensu. křivka.



Lekcja 5.

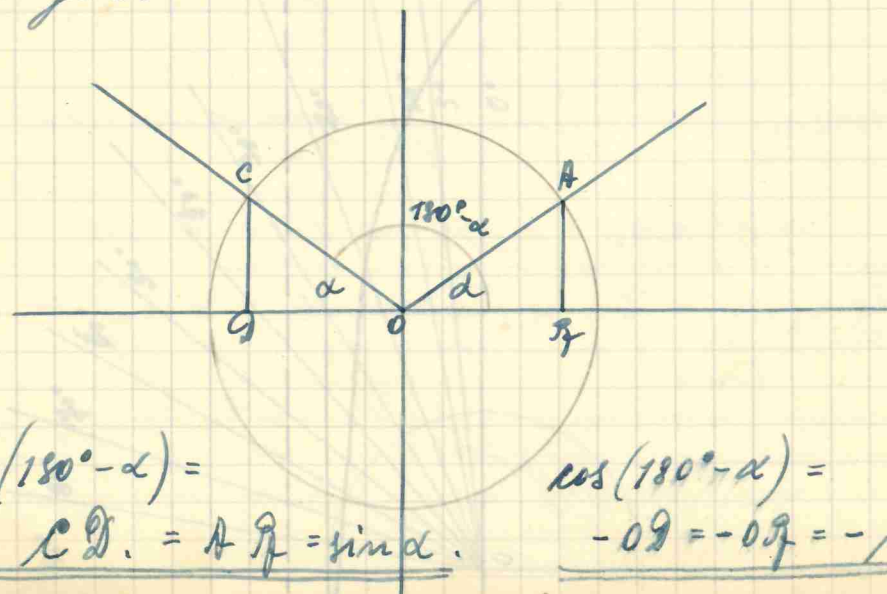
21. IX. 37.

6.) Charakterystyka funkcji cosinus dla dowolnego kąta.

Taka sama jak przy funkcji tangens, tylko nieciągłość występuje przy 180 i 360°.

Wzory redukcyjne. czt. II.

Te wzory, za pomocą których sprowadzamy funkcje trygonometryczne kątów różniących się od kątów ostrych i kątów rozwartych, do funkcji trygonometrycznych kątów ostrych.



$$\sin(180^\circ - \alpha) = \text{CD} = \text{AQ} = \sin \alpha.$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\text{OQ} = -\text{OQ} = -\cos \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{tg}(180^\circ - \alpha) &= \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\text{tg} \alpha. \\ \text{ctg}(180^\circ - \alpha) &= \frac{\cos(180^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\text{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Przy kątach spełniających funkcje jednego równają się tym samym funkcjom drugiego.

Przykład: tg minus, z wyjątkiem sinus.

$$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = 0.70711.$$

$$\text{tg} 120^\circ = -\text{tg} 60^\circ = -1.73205.$$

$$\text{ctg} 150^\circ = -\text{ctg} 30^\circ = -1.73205.$$

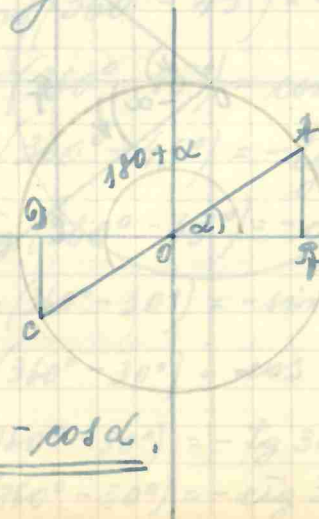
$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -0.50000.$$

Lekcja 6.

23. IX. 37.

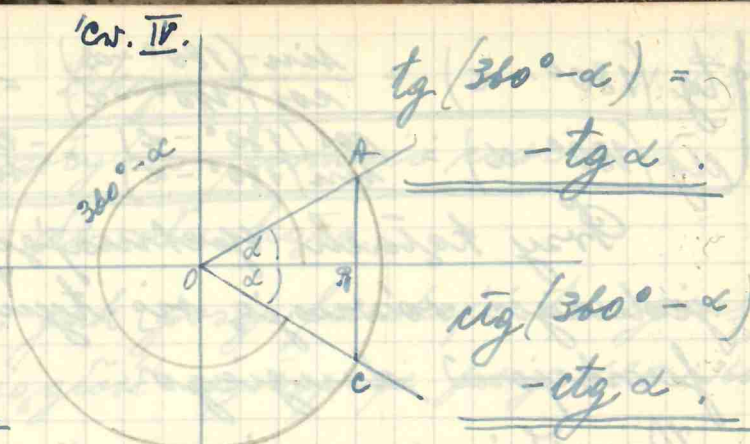
Wzory redukcyjne. dla czt. III.

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ + \alpha) &= -\text{AQ} = -\text{AQ} = -\sin \alpha. \\ \cos(180^\circ + \alpha) &= -\text{OQ} = -\text{OQ} = -\cos \alpha. \\ \text{tg}(180^\circ + \alpha) &= \frac{\sin(180^\circ + \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \text{tg} \alpha. \\ \text{ctg}(180^\circ + \alpha) &= \frac{\cos(180^\circ + \alpha)}{\sin(180^\circ + \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \text{ctg} \alpha. \end{aligned}$$



W. IV.

$$\left\{ \begin{aligned} \sin(360^\circ - \alpha) &= \\ -C\beta &= -A\beta = \\ &= -\sin \alpha. \\ \cos(360^\circ - \alpha) &= \\ O\beta &= \cos \alpha. \end{aligned} \right.$$

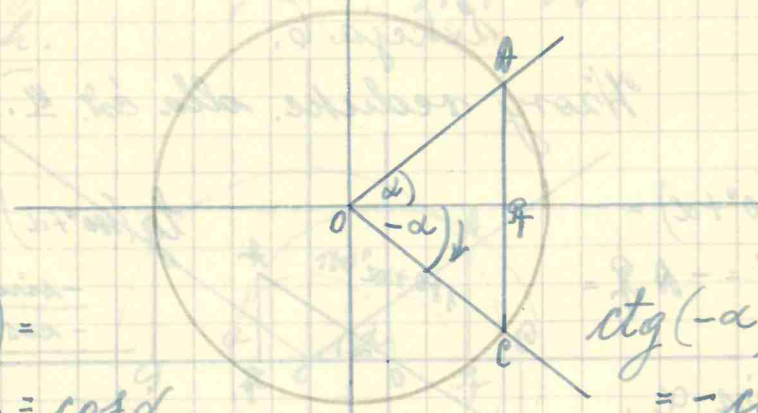


$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) &= \\ &= -\operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) &= \\ &= -\operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

W.

$$\left\{ \begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -C\beta = \\ &= -A\beta = -\sin \alpha. \\ \cos(-\alpha) &= \\ &= O\beta = \cos \alpha. \end{aligned} \right.$$



$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}(-\alpha) &= \\ &= -\operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 300^\circ &= \sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}. \\ \cos 300^\circ &= \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}. \\ \operatorname{tg} 300^\circ &= \operatorname{tg}(360^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}. \\ \operatorname{ctg} 300^\circ &= \operatorname{ctg}(360^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{ctg} 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Ladanie.

24.12.37.

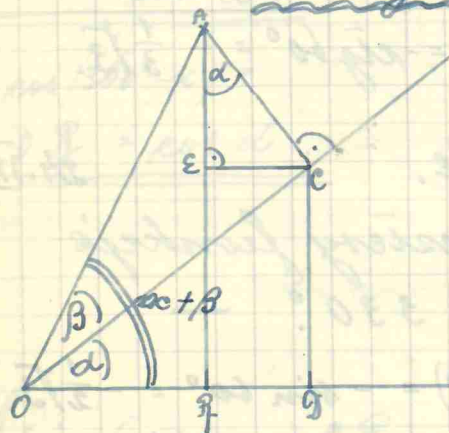
Wyznaczyć wszystkie wartości funkcji
kątów: 240° , 315° , 330° .

- $$\begin{aligned} \sin 240^\circ &= +\sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}. \\ \cos 240^\circ &= \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}. \\ \operatorname{tg} 240^\circ &= \operatorname{tg}(180^\circ + 60^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}. \\ \operatorname{ctg} 240^\circ &= \operatorname{ctg}(180^\circ + 60^\circ) = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \sin 315^\circ &= \sin(360^\circ - 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}. \\ \cos 315^\circ &= \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}. \\ \operatorname{tg} 315^\circ &= \operatorname{tg}(360^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1. \\ \operatorname{ctg} 315^\circ &= \operatorname{ctg}(360^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \sin 330^\circ &= \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}. \\ \cos 330^\circ &= \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}. \\ \operatorname{tg} 330^\circ &= \operatorname{tg}(360^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \\ \operatorname{ctg} 330^\circ &= \operatorname{ctg}(360^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{ctg} 30^\circ = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Lekcja 7.

30. IX. 37.

Funkcje trygonometryczne sumy kątów.



$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \frac{AB}{OA} = \frac{AE + EB}{OA} = \\ &= \frac{AE + CD}{OA} = \frac{AE}{OA} + \frac{CD}{OA} = \\ &= \frac{AC \cos \alpha}{OA} + \frac{OC \sin \alpha}{OA} = \\ &= \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha = \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \frac{OB}{OA} = \frac{OB - AB}{OA} = \frac{OB - EC}{OA} = \frac{OB}{OA} - \frac{EC}{OA} = \\ &= \frac{OC \cos \alpha}{OA} - \frac{AE \sin \alpha}{OA} = \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) &= \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} = \\ &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \\ \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}.\end{aligned}$$

Lekcja 8.

1. X. 37.

$$\cos 145^\circ = \cos(180^\circ - 35^\circ) = -\cos 35^\circ.$$

Funkcje trygonometryczne kątów podwójnych.

$$|\alpha = \beta|$$

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha. \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \\ \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}.\end{aligned}$$

Funkcje trygonometryczne kątów pojedynczych.

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$\begin{cases} \cos d = \cos^2 \frac{d}{2} - \sin^2 \frac{d}{2} \\ \operatorname{tg} d = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{d}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{d}{2}} \\ \operatorname{ctg} d = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{d}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{d}{2}} \end{cases}$$

Lekcja 9.

5.X.37.

Funkcje trygonom. kątów połówek.

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{d}{2} + \sin^2 \frac{d}{2} &= 1 \\ -\cos^2 \frac{d}{2} + \sin^2 \frac{d}{2} &= -\cos d \\ 2 \sin^2 \frac{d}{2} &= 1 - \cos d \\ \sin^2 \frac{d}{2} &= \frac{1 - \cos d}{2} \end{aligned}$$

$$\sin \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos d}{2}}$$

$$2 \cos^2 \frac{d}{2} = 1 + \cos d$$

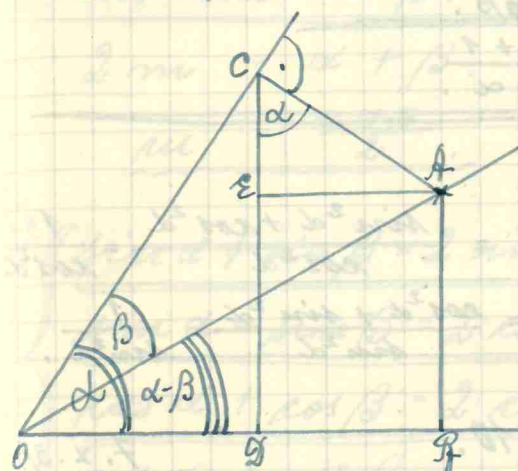
$$\cos \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos d}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos d}{1 + \cos d}}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos d}{1 - \cos d}}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos d}{2}} \\ \cos \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos d}{2}} \\ \operatorname{tg} \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos d}{1 + \cos d}} \\ \operatorname{ctg} \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos d}{1 - \cos d}} \end{cases}$$

Funkcje trygonom. różnicy kątów.



$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \frac{BE}{OA} = \frac{CE}{OA} = \\ &= \frac{OC - CE}{OA} = \frac{OC}{OA} - \frac{CE}{OA} = \\ &= \frac{OC \sin \alpha}{OA} - \frac{CA \cos \alpha}{OA} = \\ &= \cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha = \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \frac{OB}{OA} = \frac{OB + BE}{OA} = \frac{OB + EA}{OA} = \frac{OB}{OA} + \frac{EA}{OA} = \\ &= \frac{OC \cos \alpha}{OA} + \frac{CA \sin \alpha}{OA} = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha = \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) &= \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \\ \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \\ \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 &= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1 = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Lekcja 10.

7. X. 37.

Suma i różnica funkcji sinus i cosinus

$$\sin(m + n) = \sin m \cos n + \cos m \sin n.$$

$$\sin(m - n) = \sin m \cos n - \cos m \sin n.$$

$$\cos(m + n) = \cos m \cos n - \sin m \sin n.$$

$$\cos(m - n) = \cos m \cos n + \sin m \sin n.$$

$$\sin(m + n) + \sin(m - n) = 2 \sin m \cos n.$$

$$\sin(m + n) - \sin(m - n) = 2 \cos m \sin n.$$

$$\cos(m + n) + \cos(m - n) = 2 \cos m \cos n.$$

$$\cos(m + n) - \cos(m - n) = -2 \sin m \sin n.$$

$$m + n = \alpha.$$

$$m - n = \beta.$$

$$2m = \alpha + \beta.$$

$$m = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$2n = \alpha - \beta.$$

$$n = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\begin{cases} \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \\ \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \\ \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \\ \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{cases}$$

Przekształcanie wyrażeń

Zawierających funkcje trygonometryczne
na wyrażenia dające się logarytmować.

$$1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \left[\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \right] -$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha (1-\operatorname{tg}^2 \alpha) = 2\operatorname{tg} \alpha$$

$$1-\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}$$

$$1-\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}$$

$$\frac{2\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}} = 2 \frac{\sin \alpha \cos 2\alpha}{\cos \alpha \sin 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos 2\alpha}{\cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha} =$$

$$\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

Ładanie.

7. X. 37.

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1 = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - 1 = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1 = \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot 2 \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha \cdot 2 \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha \cdot 2 \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos 2\alpha \cdot 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \sin \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

Łekcja 11.

8. X. 37.

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$$

$$1 + \sin \alpha = 1 + \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$1 + \sin \alpha = 1 + \cos(90^\circ - \alpha) = 2 \cos^2 \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 2 \cos^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$$

$$1 - \sin \alpha = 1 - \cos(90^\circ - \alpha) = 2 \sin^2 \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 2 \sin^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sin \alpha + \sin(90^\circ - \alpha) = 2 \sin(45^\circ) \cos(\alpha - 45^\circ)$$

Ładanie.

11. X. 37.

$$\sin \alpha - \cos \alpha =$$

$$= \sin \alpha - \sin(90^\circ - \alpha) = 2 \cos 45^\circ$$

$$\sin \frac{2\alpha - 90^\circ}{2} = 2 \cos 45^\circ \sin(\alpha - 45^\circ)$$

$$\begin{aligned}
 1 + \operatorname{tg} \alpha &= 1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \\
 &= \frac{\sin(90^\circ - \alpha) + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin 45^\circ \cos(45^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} = \\
 &= \left(\frac{2 \sin 45^\circ \cos(45^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 - \operatorname{tg} \alpha &= 1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \\
 &= \frac{\sin(90^\circ - \alpha) - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \cos 45^\circ \sin(45^\circ - \alpha)}{\cos \alpha}
 \end{aligned}$$

Lekeja 12.

12. X. 37.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \pm \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \\
 &= \frac{\cos \beta \sin \alpha \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \\
 &= \left(\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \\
 &= \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \\
 &= \frac{2}{\sin 2\alpha}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sin \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \\
 &= \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \\
 &= \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} &= \frac{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha}} = \\
 &= \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha) + \sin \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) - \sin \alpha} = \\
 &= \frac{2 \sin 45^\circ \cos(45^\circ - \alpha)}{2 \cos 45^\circ \sin(45^\circ - \alpha)} = \frac{\sin 45^\circ \cos(45^\circ - \alpha)}{\cos 45^\circ \sin(45^\circ - \alpha)}
 \end{aligned}$$

Ladanie.

13. X. 37.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \\
 &= \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cos^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}{2 \sin^2(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}} = \frac{\cos(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}{\sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})} = \operatorname{ctg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$$

Lekeja 13.

14. X. 37.

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha &= \\
 &= (\sin \alpha + \sin 2\alpha) + (\sin 3\alpha + \sin 4\alpha) = \\
 &= (\sin 2\alpha + \sin \alpha) + (\sin 4\alpha + \sin 3\alpha) = \\
 &= 2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{7\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \\
 &= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{3\alpha}{2} + \sin \frac{7\alpha}{2} \right) = \\
 &= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(2 \sin \frac{5\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{5\alpha}{2}
 \end{aligned}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ; \quad \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta).$$

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \sin \alpha + \sin \beta +$$

$$+ \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta =$$

$$= (\sin \alpha + \sin \alpha \cos \beta) + (\sin \beta + \cos \alpha \sin \beta) =$$

$$= \sin \alpha (1 + \cos \beta) + \sin \beta (1 + \cos \alpha) =$$

$$= \sin \alpha \cdot 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} + \sin \beta \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} =$$

$$= 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + 4 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} =$$

$$= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) =$$

$$= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) =$$

$$= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) =$$

$$= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Лекция 14.

15. X. 37.

c.d.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma.$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{180^\circ - \gamma}{2}.$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2} \right) = \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Таблица IV.

Логарифмы функций тригонометрических.

$$\log \cos 15^\circ 14' 12'' = \begin{array}{r} 9.98447 - 10 \\ \quad 1 \\ \hline 9.98446 - 10. \end{array} \quad \begin{array}{r} 0.06.12 \\ 12 \\ \hline 4072 \end{array}$$

$$\log \operatorname{tg} 55^\circ 25' 16'' = \begin{array}{r} 10.16151 - 10 \\ \quad 7 \\ \hline 10.16158 - 10. \end{array} \quad \begin{array}{r} 0.45.16 \\ 270 \\ \hline 720 \end{array}$$

$$\log \sin 62^\circ 13' 48'' = \begin{array}{r} 9.94904 - 10 \\ \quad 5 \\ \hline 9.94909 - 10. \end{array} \quad \begin{array}{r} 48.0.11 \\ 48 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$\log \cos 47^\circ 58' 50'' = \begin{array}{r} 9.82579 - 10 \\ \quad 1 \\ \hline 9.82578 - 10. \end{array} \quad \begin{array}{r} 0.23.50 \\ 115 \end{array}$$

$$\log \operatorname{tg} 76^\circ 35' 12'' = \begin{array}{r} 10.62244 - 10 \\ \quad 11 \\ \hline 10.62255 - 10. \end{array} \quad \begin{array}{r} 0.93.12 \\ 186 \\ \hline 1716 \end{array}$$

$$\log \operatorname{ctg} 18^\circ 19' 20'' = \begin{array}{r} 10.48054 - 10. \\ \quad 14 \\ \hline 10.48040 - 10. \end{array} \quad \begin{array}{r} 0.71.20 \\ 1420 \end{array}$$

$$\log \sin 12^\circ 15' 16'' = \begin{array}{r} 9.32670 - 10 \\ \quad 16 \\ \hline 9.32686 - 10. \end{array} \quad \begin{array}{r} 0.97.16 \\ 582 \\ \hline 1552 \end{array}$$

Lekcja 15.

19. X. 37.

$$\log \operatorname{ctg} 63^{\circ} 45' 12'' = 9.69298 - 10$$

$$\underline{ 6}$$

$$9.69292 - 10.$$

$$\begin{array}{r} 0.53.12 \\ 106 \\ \hline 636 \end{array}$$

$$\log \sin \alpha = 9.67528 - 10;$$

$$\alpha = 28^{\circ} 15' 34''.$$

$$\begin{array}{r} 130: 0.39.34 \\ \hline 130 \end{array}$$

$$\log \cos \alpha = 8.97347 - 10$$

$$\alpha = 84^{\circ} 37' - 53''$$

$$\alpha = 84^{\circ} 36' 7''.$$

$$\begin{array}{r} 11800: 233 = 53 \\ \hline = 650 \end{array}$$

$$\log \operatorname{tg} \alpha = 9.54624 - 10$$

$$\alpha = 19^{\circ} 22' 47''$$

$$\begin{array}{r} 59300: 67 = 47 \\ \hline 3100: 67 = 47 \\ \hline 420 \end{array}$$

Podania.

19. X. 37.

$$\log \sin \alpha = 8.65321 - 10.$$

$$\alpha = 2^{\circ} 34' 45''.$$

$$\begin{array}{r} 21100: 468 = 45 \\ \hline 2380 \end{array}$$

$$\log \cos \alpha = 6.52786 - 10.$$

$$\alpha = 89^{\circ} 59' - 12'' = \alpha = 89^{\circ} 58' 48''$$

$$\begin{array}{r} 641300: 50172 = 12 \\ \hline 139580 \end{array}$$



$$\log \operatorname{tg} \alpha = 12.83760 - 10.$$

$$\alpha = 89^{\circ} 55' 0''.$$

$$\log \operatorname{ctg} \alpha = 7.58291 - 10.$$

$$\alpha = 89^{\circ} 47'$$

$$\alpha = 89^{\circ} 46' 51''$$

$$\alpha = 89^{\circ} 46' 51''$$

$$3000: 16152 = 0.$$

$$52400: 5365 = 9.$$

Lekcja 16.

21. X. 37.

Równania trygonom.

Równ. trygonom. są to równania, w których niewiadoma jest argumentem funkcji trygonometrycznej.

Należą do równań przestępnych.

Równ. trygonometryczne staranny się tak przekształcić, aby zawierało jeden argument i jedną funkcję.

Pierwotki równ. trygonom. ego zawarte w granicach kąta pełnego nazywamy głównymi i zwykle tylko te wyznaczamy.

$$\sin x = \sqrt{2} \cos^2 x.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

$$\sin x = \sqrt{2} (1 - \sin^2 x).$$

$$\sin x = \sqrt{2} - \sqrt{2} \sin^2 x.$$

$$\sqrt{2} \sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} = 0.$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm 3}{2\sqrt{2}}.$$

$$x_1 = 45^\circ.$$

$$x_2 = 135^\circ.$$

$$\sin x = -\frac{4}{2\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

$$\frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \text{ M.R.}$$

incuositive.

$$\sin x = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ.$$

$$\sin 135^\circ.$$

Radawie.

21. 8. 37.

$$1) \cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{2}.$$

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2}.$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}.$$

$$1 - 2\sin^2 x = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{2} = 2\sin^2 x.$$

$$4\sin^2 x = 1.$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}.$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ =$$

$$= \sin 150^\circ.$$

$$x_1 = 30^\circ.$$

$$x_2 = 150^\circ.$$

$$2) 2\sin^2 \frac{x}{2} + 3\cos x = 2.$$

$$2\sin^2 \frac{x}{2} + 3(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}) = 2.$$

$$2\sin^2 \frac{x}{2} + 3\cos^2 \frac{x}{2} - 3\sin^2 \frac{x}{2} = 2.$$

$$3\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2.$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1.$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \sin^2 \frac{x}{2}.$$

$$3(1 - \sin^2 \frac{x}{2}) - \sin^2 \frac{x}{2} = 2.$$

$$3 - 3\sin^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2.$$

$$1 = 4\sin^2 \frac{x}{2}.$$

$$4\sin^2 \frac{x}{2} = 1.$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ =$$

$$= \sin 150^\circ.$$

$$x_1 = 60^\circ.$$

$$x_2 = 300^\circ.$$

Rekeja 17.

22. X. 37.

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\sin x = \pm \frac{1}{2} = -\sin 30^\circ = \sin 210^\circ = \sin 330^\circ$$

$$x_3 = 210^\circ$$

$$x_4 = 330^\circ$$

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x \sin x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x \sin x + 1 - \sin^2 x = 1$$

$$\cos x \sin x - \sin^2 x = 0$$

$$\sin x (\cos x - \sin x) = 0$$

$$\sin x = 0 = \sin 0^\circ = \sin 180^\circ = \sin 360^\circ$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 180^\circ \quad x_3 = 360^\circ$$

$$\cos x - \sin x = 0$$

$$1 - \tan x = 0$$

$$\tan x = 1 = \tan 45^\circ = \tan 225^\circ$$

$$x_4 = 45^\circ \quad x_5 = 225^\circ$$

$$L = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$P = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$L = P$$

$$\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos^2 x - 2 \cos x \sin x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{2}$$

$$+ 2 \sin x \cos x = + \frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ = \sin 150^\circ$$

$$2x_1 = 30^\circ; \quad x_1 = 15^\circ$$

$$2x_2 = 150^\circ; \quad x_2 = 75^\circ$$

Ladanie.

25. X. 37.

$$1) \sin 3x = \sin x$$

$$\sin 3x - \sin x = 0$$

$$2 \cos 2x \sin x = 0$$

$$\cos 2x = 0 = \cos 90^\circ$$

$$\sin x = 0 = \sin 0^\circ$$

$$x_3 = 315^\circ$$

$$x_4 = -45^\circ$$

$$x_1 = 45^\circ$$

$$x_2 = 0^\circ$$

$$2) \cos 7x = \cos 8x$$

$$\cos 8x - \cos 7x = 0$$

$$-2 \sin \frac{15x}{2} \sin \frac{x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{15x}{2} = 0 = \sin 0^\circ$$

$$x_1 = 0^\circ$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0 = \sin 0^\circ$$

$$x_2 = 0^\circ$$

$$3.) \sin 5x = \cos 4x.$$

$$\sin 5x - \cos 4x = 0.$$

$$\sin 5x - \sin(90^\circ - 4x) = 0.$$

$$2 \cos \frac{5x + 90^\circ - 4x}{2} \sin \frac{5x - 90^\circ + 4x}{2} = 0.$$

$$2 \cos\left(\frac{x}{2} + 45^\circ\right) \sin\left(\frac{9x}{2} - 45^\circ\right) = 0.$$

$$\cos\left(\frac{x}{2} + 45^\circ\right) = 0^{\text{a}} = \cos 90^\circ.$$

$$x_1 = 90^\circ.$$

$$\sin\left(\frac{9x}{2} - 45^\circ\right) = 0 = \sin 0.$$

$$x_2 = 0^\circ.$$

$$\frac{9x}{2} - 45^\circ = 0.$$

$$9x - 90 = 0.$$

$$x_1 = 10^\circ.$$

$$x_2 = 170^\circ.$$

$$4.) \operatorname{tg} 11x = \operatorname{ctg} 7x.$$

$$\operatorname{tg} 11x - \operatorname{tg}(90^\circ - 7x) = 0.$$

$$\frac{\sin 11x}{\cos 11x} - \frac{\sin(90^\circ - 7x)}{\cos(90^\circ - 7x)} = 0.$$

$$\sin 11x \cos(90^\circ - 7x) - \sin(90^\circ - 7x) \cos 11x = 0.$$

$$\sin 11x - 90^\circ + 7x = 0.$$

$$\sin(18x - 90^\circ) = 0 = \sin 0^\circ = \sin 180^\circ = \sin 360^\circ.$$

$$18x - 90^\circ = 0^\circ.$$

$$x = \frac{90}{18} = 5^\circ.$$

$$x_1 = 5^\circ.$$

$$18x - 90^\circ = 180^\circ.$$

$$18x = 180 + 90.$$

$$x = \frac{270}{18}.$$

$$x_2 = 15^\circ.$$

$$18x - 90^\circ = 360^\circ.$$

$$18x = 360 + 90.$$

$$x = \frac{450}{18}.$$

$$x_3 = 25^\circ.$$

Задание 18.

26. X. 37.

$$\sin x \operatorname{tg} x = 1.$$

$$\sin x \frac{\sin x}{\cos x} = 1.$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x} = 1.$$

$$\sin^2 x = \cos x.$$

$$1 - \cos^2 x = \cos x.$$

$$\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}.$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\cos x_1 = \frac{-1 - 2.23}{2} = -\frac{3.23}{2} =$$

$$= -1.61. \rightarrow \text{н.е.}$$

$$\cos x_2 = \frac{-1 + 2.23}{2} = 0.61.$$

н.е.

$$\cos x = 0.61803.$$

$$\log \cos x = \log 0.618035.$$

$$0.79099 - 1$$

$$0.79097$$

$$\log \cos x = 0.79101 - 1.$$

$$\log \cos x = 9.79101 - 10.$$

$$x = 38^\circ 10'$$

$$x = 51^\circ 50' - 22''$$

$$x = 51^\circ 49' 38''.$$

$$0.35.7$$

$$600: 0.27 = 22.$$

$$\cos x = 0.618035 = \cos 51^\circ 49' 38'' =$$

$$= \cos 308^\circ 10' 22''.$$

$$\cos x + \cos \frac{x}{2} = 0.$$

$$2 \cos \frac{x + \frac{x}{2}}{2} \cos \frac{x}{4} = 0.$$

$$2 \cos \frac{3x}{4} \cos \frac{x}{4} = 0.$$

$$\cos \frac{3x}{4} = 0 = \cos 90^\circ = \cos 270^\circ.$$

$$\frac{3x}{4} = 90.$$

$$3x = 360.$$

$$x_1 = 120^\circ.$$

$$\frac{3x}{4} = 270$$

$$3x = 1080^\circ$$

$$x_2 = 360^\circ.$$

$$\cos \frac{x}{4} = 0 = \cos 90^\circ =$$

$$\cos 270^\circ.$$

$$\frac{x}{4} = 270^\circ$$

$$x = 1080^\circ.$$

$$\frac{x}{4} = 90^\circ$$

$$x = 360^\circ.$$

Rad. clon. 1) $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3}.$

2) $\sin 3x + 4 \sin^3 x = \frac{3}{2}.$

Rad. clon.

27. x. 37.

1) $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \sqrt{3}.$

ur. $\frac{\sin x}{\cos x}$

$$\frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} = \sqrt{3}.$$

$$\tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 3(\tan^2 x + 2 \tan x + 1).$$

$$\tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 3 \tan^2 x + 6 \tan x + 3.$$

$$2 \tan^2 x + 8 \tan x + 2 = 0.$$

$$\tan^2 x + 4 \tan x + 1 = 0.$$

$$\tan x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2}.$$

$$\tan x = \frac{-4 \pm 3.46410}{2}.$$

$$\tan x_1 = -7.46410 : 2 = -3.73205.$$

$$\tan x_2 = -0.53590 : 2 = \boxed{u.e.} = -0.26795.$$

2) $\sin 3x + 4 \sin^3 x = \frac{3}{2}.$

$$\sin(2x + x) + 4 \sin^3 x = \frac{3}{2}.$$

$$\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x + 4 \sin^3 x = \frac{3}{2}.$$

$$2 \sin x \cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x + 4 \sin^3 x = \frac{3}{2}.$$

$$2 \sin x \cos^2 x (1 - \sin^2 x) + (1 - \sin^2 x) \sin x - \sin^3 x + 4 \sin^3 x = \frac{3}{2}$$

$$2 \sin x - 2 \sin^3 x + \sin x - \sin^3 x + 4 \sin^3 x = \frac{3}{2}$$

$$3 \sin x = \frac{3}{2}$$

$$6 \sin x = 3$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ = \sin 150^\circ$$

$$\underline{x_1 = 30^\circ}$$

$$\underline{x_2 = 150^\circ}$$

$$L = 1 + 4 \cdot \frac{1}{8}$$

$$L = 1 + \frac{4}{8}$$

$$L = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$P = \frac{3}{2}$$

Seheja 19.

28. X. 37.

$$1 - \sin x = 2(1 - \cos x)$$

$$1 - \sin x = 2 - 2 \cos x$$

$$2 \cos x = \sin x + 1$$

$$\sin x + 1 = 2\sqrt{1 - \sin^2 x}$$

Poru. mienym.

$$\sin^2 x + 2 \sin x + 1 = 4 - 4 \sin^2 x$$

$$5 \sin^2 x + 2 \sin x - 3 = 0$$

$$\sin x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{10} = \frac{-2 \pm 8}{10}$$

$$\sin x_1 = -1 = \sin 270^\circ$$

$$\underline{x_1 = 270^\circ}$$

$$\sin x_2 = 0.6 = \sin 36^\circ 52' 11''$$

$$\log \sin x = \log 0.6 = \sin 143^\circ 7' 49''$$

$$\log \sin x = 0.77815 - 1$$

$$\log \sin x = 9.77815 - 10$$

$$\frac{812}{3}$$

$$300 : 0.28 = 11$$

$$\underline{x_2 = 36^\circ 52' 11''}$$

$$x_3 = 143^\circ 7' 49'' \text{ nie spec. } L = 2, P = 2$$

$$\tan x - \sin x + \cos x = 1$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x + \cos x = 1$$

$$\sin x - \sin x \cos x + \cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\sin x (1 - \cos x) + \cos x (\cos x - 1) = 0$$

$$\sin x (1 - \cos x) - \cos x (1 - \cos x) = 0$$

$$(1 - \cos x)(\sin x - \cos x) = 0$$

$$1 - \cos x = 0$$

$$\cos x = 1 = \cos 0^\circ = \cos 360^\circ$$

$$\underline{x_1 = 0^\circ}$$

$$\underline{x_2 = 360^\circ}$$

$$\sin x - \cos x = 0$$

$$\operatorname{tg} x = 1 = \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} 225^\circ$$

$$\underline{x_3 = 45^\circ}$$

$$\underline{x_4 = 225^\circ}$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$$

$$2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{7x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0$$

$$2 \cos \frac{x}{2} (\sin \frac{3x}{2} + \sin \frac{7x}{2}) = 0$$

$$2 \cos \frac{x}{2} 2 \sin \frac{5x}{2} \cos x = 0$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0 = \cos 90^\circ =$$

$$= \cos 270^\circ$$

$$\underline{x_1 = 180^\circ}$$

$$\underline{x_2 = 540^\circ}$$

$$\sin \frac{5x}{2} = 0 = \sin 0^\circ =$$

$$= \sin 180^\circ =$$

$$= \sin 360^\circ$$

$$\underline{x_3 = 0^\circ}$$

$$\underline{x_4 = 360^\circ}$$

$$\underline{x_5 = \frac{360}{5} = 72^\circ}$$

$$\underline{x_6 = \frac{720}{5} = 144^\circ}$$

$$\underline{x_7 = \frac{1080}{5} = 216^\circ}$$

$$\underline{x_8 = \frac{1440}{5} = 288^\circ}$$

$$\cos x = 0 =$$

$$= \cos 90^\circ =$$

$$= \cos 270^\circ$$

$$\underline{x_9 = 90^\circ}$$

$$\underline{x_{10} = 270^\circ}$$

Zadanie.

28. X. 37.

$$1) 2 \sin x + \cos x - \sin 2x = 1$$

$$2 \sin x + \cos x - 2 \sin x \cos x = 1$$

$$2 \sin x (1 - \cos x) + \cos x = 1$$

$$2 \sin x (1 - \cos x) = 1 - \cos x$$

$$2 \sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ = \sin 150^\circ$$

$$\underline{x_1 = 30^\circ}$$

$$\underline{x_2 = 150^\circ}$$

$$\mathcal{L} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\mathcal{L} = 1$$

$$\mathcal{P} = 1$$

$$2) \sin^2 x - (1 + \sqrt{3}) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$$

$$\sin^2 x - (\sin x \cos x + \sqrt{3} \sin x \cos x) + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$$

$$\sin^2 x - \sin x \cos x - \sqrt{3} \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$$

$$\sin x (\sin x - \cos x) - \sqrt{3} \cos x (\sin x - \cos x) = 0$$

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$\sin x = \sqrt{3} \cos x$$

$$\sin^2 x = 3 \cos^2 x$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 3.$$

$$\operatorname{tg}^2 x = 3.$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} 240^\circ.$$

$$\underline{x_1 = 60^\circ.}$$

$$\underline{x_2 = 240^\circ.}$$

$$L = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - (1+\sqrt{3})\frac{1}{2}\sqrt{3}\frac{1}{2} + \sqrt{3}\frac{1}{4}.$$

$$L = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{3}.$$

$$L = 0.$$

$$P = 0.$$

Lehja 20.

29.1.37.

$$1) \sin 2x + \sin 4x = \sqrt{3} \cos x.$$

$$2 \sin 3x \cos x = \sqrt{3} \cos x.$$

$$\cos x (2 \sin 3x - \sqrt{3}) = 0.$$

$$\cos x = 0 = \cos 90^\circ = \cos 270^\circ.$$

$$\underline{x_1 = 90^\circ.}$$

$$\underline{x_2 = 270^\circ.}$$

$$2 \sin 3x - \sqrt{3} = 0.$$

$$\sin 3x = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin 60^\circ = \sin 120^\circ.$$

$$\underline{x_3 = 20^\circ.}$$

$$\underline{x_4 = 40^\circ.}$$

$$2) \operatorname{ctg} x - \cos x = \frac{1 - \sin x}{2 \sin x}.$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x = \frac{1 - \sin x}{2 \sin x}.$$

$$2 \cos x - 2 \sin x \cos x = 1 - \sin x.$$

$$2 \cos x (1 - \sin x) = (1 - \sin x).$$

$$2 \cos x \neq (1 - \sin x) - (1 - \sin x) = 0.$$

$$(1 - \sin x)(2 \cos x - 1) = 0.$$

$$1 - \sin x = 0.$$

$$\sin x = 1 = \sin 90^\circ.$$

$$\underline{x_1 = 90^\circ.}$$

$$2 \cos x = 1.$$

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \cos 300^\circ.$$

$$\underline{x_2 = 60^\circ.}$$

$$\underline{x_3 = 300^\circ.}$$

$$3) \operatorname{tg} 3x = 2 \sin 6x$$

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 2 \sin 6x.$$

$$\sin 3x = 2 \sin 6x \cos 3x.$$

$$(\sin 3x - 2 \sin 6x \cos 3x = 0.)$$

$$\sin 3X = 2 \sin 2 \cdot 3X \cos 3X.$$

$$\sin 3X = 4 \sin 3X \cos 3X \cos 3X.$$

$$\sin 3X - 4 \sin 3X \cos^2 3X = 0.$$

$$\sin 3X (1 - 4 \cos^2 3X) = 0.$$

$$\sin 3X = 0 = \sin 0^\circ = \sin 180^\circ = \sin 360^\circ.$$

$$\underline{X_1 = 0^\circ} \quad \underline{X_2 = 60^\circ} \quad \underline{X_3 = 120^\circ}.$$

$$1 - 4 \cos^2 3X = 0.$$

$$4 \cos^2 3X = 1.$$

$$\cos^2 3X = \frac{1}{4}.$$

$$\cos 3X = \pm \frac{1}{2}.$$

$$\cos 3X = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \cos 300^\circ.$$

$$\underline{X_4 = 20^\circ} \quad \underline{X_5 = 100^\circ}.$$

$$\cos 3X = -\frac{1}{2} = -\cos 60^\circ = \cos 120^\circ = \cos 240^\circ.$$

$$\underline{X_6 = 40^\circ} \quad \underline{X_7 = 80^\circ}.$$

$$L = \operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}.$$

$$P = 2 \sin 240^\circ \cos 120^\circ = -2 \sin 60^\circ = -\sqrt{3}.$$

$$L = P.$$

Ladame.

2. XI. 37.

$$1.) \sin 2X = (\cos X - \sin X)^2.$$

$$\sin 2X = \cos^2 X - 2 \sin X \cos X + \sin^2 X.$$

$$\sin 2X = \cos^2 X - \sin 2X + \sin^2 X.$$

$$\cos^2 X + \sin^2 X - 2 \sin 2X = 0.$$

$$1 - \sin^2 X + \sin^2 X - 2 \sin 2X = 0.$$

$$1 - 2 \sin 2X = 0.$$

$$2 \sin 2X = 1.$$

$$\sin 2X = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ = \sin 150^\circ.$$

$$\underline{X_1 = 15^\circ}$$

$$\underline{X_2 = 75^\circ}$$

$$2.) \sin X + \cos X = 1\frac{1}{4}.$$

$$\frac{\sin X}{\cos X} + 1 = 1\frac{1}{4}.$$

$$\operatorname{tg} X = \frac{1}{4} = 0.25 = \operatorname{tg} 14^\circ 2' 10'' = \operatorname{tg} 194^\circ 2' 10''.$$

$$\log \operatorname{tg} X = \log 0.25.$$

$$\log \operatorname{tg} X = 0.39794 - 1.$$

$$\log \operatorname{tg} X = 9.39794 - 10.$$

$$X = 14^\circ 2' 10''.$$

$$\frac{785}{900} : 0.90 = 10.$$

$$\underline{x_1 = 14^\circ 2' 10''}$$

$$\underline{x_2 = 194^\circ 2' 10''}$$

$$3.) \sin 4x - \sin 2x = \sin x.$$

$$2 \cos 3x \sin x - \sin x = 0.$$

$$\sin x (2 \cos 3x - 1) = 0.$$

$$\sin x = 0 = \sin 0^\circ = \sin 180^\circ = \sin 360^\circ.$$

$$\underline{x_1 = 0^\circ}$$

$$\underline{x_2 = 180^\circ}$$

$$\underline{x_3 = 360^\circ}$$

$$2 \cos 3x = 1.$$

$$\cos 3x = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \cos 300^\circ.$$

$$\underline{x_4 = 20^\circ}$$

$$\underline{x_5 = 100^\circ}$$

Sekeja 21.

$$\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = 3 \operatorname{tg} x - 2.$$

$$\operatorname{tg}^2 x = 3 \operatorname{tg} x - 2.$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}.$$

4. XI. 37.

$$\frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x + \cos^2 x}.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}.$$

$$\operatorname{tg} x_1 = 1 = \operatorname{tg} 45^\circ.$$

$$\underline{x_1 = 45^\circ}$$

$$\operatorname{tg} x_2 = 2.$$

$$\log \operatorname{tg} x_2 = \log 2.$$

$$\log \operatorname{tg} x_2 = 0.30103.$$

$$\log \operatorname{tg} x_2 = 10.30103 - 10.$$

100

300 : 53 = 6

$$x = 63^\circ 26' 6''$$

$$\operatorname{tg} x_2 = 2 = \operatorname{tg} 63^\circ 26' 6''.$$

$$\underline{x_2 = 63^\circ 26' 6''}$$

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} = 3.$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 3.$$

$$\sin x \cos x + 1 = 3 \cos^2 x.$$

$$\sin x \cos x - 3 \cos^2 x + 1 = 0.$$

$$\sin x \cos x - 3 \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0.$$

$$\sin x \cos x - 2 \cos^2 x + \sin^2 x = 0. \quad | : \cos^2 x$$

$$\operatorname{tg} x - 2 + \operatorname{tg}^2 x = 0.$$

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\operatorname{tg} x_1 = 1 = \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} 225^\circ.$$

$$\underline{x_1 = 45^\circ}$$

$$\underline{x_2 = 225^\circ}$$

$$\operatorname{tg} x_2 = -2.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 2.$$

$$\varphi = 63^\circ 26' 6''.$$

$$\operatorname{tg} x_2 = +88^\circ 28' + \operatorname{tg} -2 = -\operatorname{tg} 63^\circ 26' 6''.$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - 63^\circ 26' 6'') = \operatorname{tg}(360^\circ - 63^\circ 26' 6'').$$

$$\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1.$$

$$\sin \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1.$$

$$\sin \frac{x}{2} + 1 - \sin^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 1.$$

$$\sin \frac{x}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 0.$$

$$2 \sin \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0.$$

$$\sin \frac{x}{2} (2 \sin \frac{x}{2} - 1) = 0.$$

$$\sin \frac{x}{2} (1 - 2 \sin \frac{x}{2}) = 0.$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0. = \sin 0^\circ = \sin 180^\circ = \sin 360^\circ.$$

$$\underline{x_1 = 0}$$

$$\underline{x_2 = 360^\circ}$$

$$x_3 = 720^\circ.$$

$$1 - 2 \sin \frac{x}{2} = 0.$$

$$+ 2 \sin \frac{x}{2} = +1$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ = \sin 150^\circ.$$

$$\underline{x_3 = 60^\circ}$$

$$\underline{x_4 = 300^\circ}$$

Radawie.

4. XI. 37.

$$1) \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2.$$

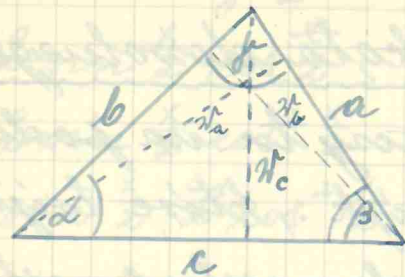
$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 2 \cos x \sin x.$$

$$\sin^2 x + 1 - \sin^2 x = \sin 2x.$$

$$\sin 2x = 1. = \sin 90^\circ.$$

$$\underline{x = 45^\circ}$$



$$h_c = a \sin \beta = b \sin \alpha.$$

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta.$$

$$h_a = b \sin \gamma = c \sin \beta.$$

$$b : c = \sin \beta : \sin \gamma.$$

$$h_b = a \sin \gamma = c \sin \alpha.$$

$$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma.$$

W trójkącie, stosunek którykolwiek dwóch boków, równa się stosunkowi sinusów kątów tym bokom przeciwległych. (Twierdzenie sinusowe.)

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma. \quad \text{Prop. bież.}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}. \quad \text{Równości stosunków.}$$

$$P = \frac{a}{2} \cdot h_a = \frac{a}{2} \cdot b \sin \gamma = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

$$P = \frac{b}{2} \cdot h_b = \frac{b}{2} \cdot c \sin \alpha = \frac{1}{2} bc \sin \alpha.$$

$$P = \frac{c}{2} \cdot h_c = \frac{c}{2} \cdot a \sin \beta = \frac{1}{2} ac \sin \beta.$$

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \sin \beta.$$

Pole trójkąta równa się połowie iloczynu którykolwiek dwóch boków i sinus kąta między nimi zawartego.

$$1.) \alpha; \beta; \gamma.$$

$$2.) \gamma; a, b; P.$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta).$$

$$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$$

$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma}.$$

$$b : c = \sin \beta : \sin \gamma$$

$$b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma}.$$

$$P = \frac{1}{2} ac \sin \beta.$$

$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma}.$$

$$P = \frac{1}{2} \frac{c \sin \alpha}{\sin f} \quad \text{or} \quad c \sin \beta$$

$$P = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin f}$$

Zadanie.

8. XI. 37.

1.) $c = 314.7 \text{ m.}$

$\alpha = 58^\circ 12' \quad \beta = 63^\circ 15'$

2.) $f; a; b; P.$

$f = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

$f = 58^\circ 33'$

58°12'	180°
63°15'	121°27'
121°27'	58°33'

$a : c = \sin \alpha : \sin f$

10.52745

$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin f}$

$\log a = \log c + \log \sin \alpha - \log \sin f$

$\log a = 2.49626$

$624 \quad 20 : 14 = 0.1$

$a = 313.51 \text{ m.}$

0.49790	+2
9.92936	-10
12.42726	
-9.93100	+10
2.49626	

$b : c = \sin \beta : \sin f$

$b = \frac{c \sin \beta}{\sin f}$

$\log b = \log c + \log \sin \beta - \log \sin f$

$\log b = 2.51774$

$772 \quad 20 : 14 = 0.1$

$b = 329.41 \text{ m.}$

$P = \frac{1}{2} ac \sin \beta$

$P = \frac{ac \sin \beta}{2}$

$\log P = \log a + \log c + \log \sin \beta - \log 2$

$\log P = 4.64397$

$395 \quad 20 : 9 = 0.2$

$P = 44052 \text{ m.}$

2.49790	
9.95084	-10
12.44874	-10
-9.93100	+10
2.51774	

2.49626	
2.49790	
9.95084	-10
14.94500	-10
-0.30103	
4.64397	

Príklad 23.

1.) $x = y \sin \alpha$

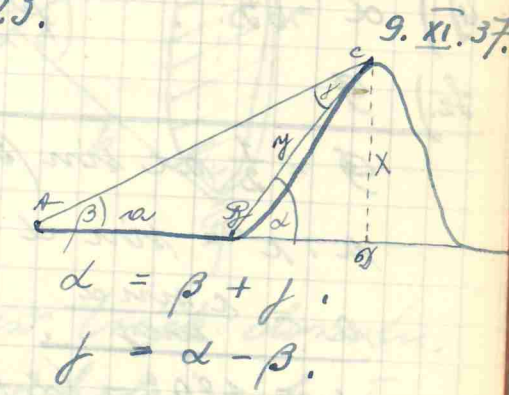
$a : y = \sin f : \sin \beta$

$a : y = \sin(\alpha - \beta) : \sin \beta$

$y = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$

$x = \frac{a \sin \beta \sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$

$x = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$



9. XI. 37.

$$1.) - a = 2500 \text{ m.} \quad \alpha = 62^\circ 17' \\ \beta = 38^\circ 10'.$$

$$\log x = \log a + \log \sin \alpha + \log \sin \beta - \log \sin(\alpha - \beta).$$

$$\alpha - \beta = \frac{62^\circ 17'}{38^\circ 10'} = 24^\circ 7'$$

$$\log x = 3.52467.$$

$$10: 13 = 0.08.$$

$$x = 3347 \text{ m.}$$

Zadanie,

$$1.) \alpha = 65^\circ, \quad \beta = 70^\circ, \quad c = 36.15 \text{ m.}$$

$$2.) \varphi.$$

$$\varphi = \frac{1}{2} ac \sin \beta.$$

$$a : c = \sin \alpha : \sin \beta.$$

$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \beta}.$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta).$$

$$\gamma = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{c \sin \alpha}{\sin \beta} c \sin \beta = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \beta}.$$

$$\log \varphi = 2 \log c + \log \sin \alpha + \log \sin \beta - (\log 2 + \log \sin \gamma).$$

$$\begin{array}{r} 0.30103 \\ 9.84949 - 10 \\ \hline 10.15052 - 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.55811 \cdot 2 \\ \hline 3.11622 \\ 9.95728 - 10 \\ 9.97299 - 10 \\ \hline 23.04649 - 20 \\ -10.15052 - 10 \\ \hline 12.89597 - 10 \end{array}$$

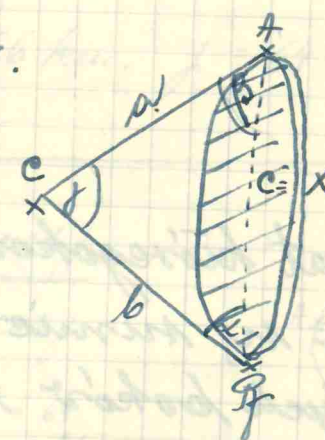
$$\log \varphi = 2.89597.$$

$$\varphi = 7870 = 787 \text{ m.}$$

Lekeja 24.

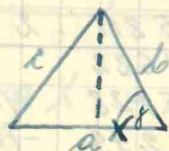
$$x : a = \sin \gamma : \sin \alpha.$$

$$x = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$



II. Przykład rozwiązań. trójk. dowoln.
W trójkącie znany 2 boki i kąt
między nimi zawarty.
Rozwiązać ten trójkąt.

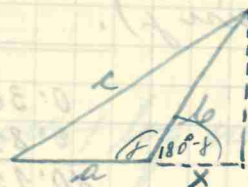
Twierdzenie Carnota.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ax.$$

$$x = b \cos \gamma.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$



$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ax.$$

$$x = b \cos(180^\circ - \gamma).$$

$$x = -b \cos \gamma.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Kwadrat kwadratu boków trójkąta równa się sumie kwadratów dwóch pozostałych boków minus podwójny iloczyn tych boków przez cos kąta między nimi zawartego.

$$D.) a, b, \gamma.$$

$$Z.) c, \alpha, \beta; P.$$

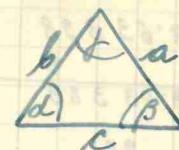
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}.$$

$$x = 2ab \cos \gamma.$$

$$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma.$$

$$\sin \alpha = \frac{a \sin \gamma}{c}.$$

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$



Zadanie.

15. XI. 37.

$$D.) a = 1.5 \text{ km}, b = 0.86 \text{ km}, \gamma = 64^\circ 30' 20''.$$

$$Z.) c.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}.$$

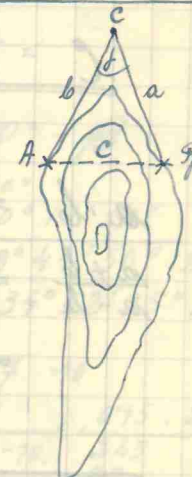
$$\frac{1.5 \cdot 1.5}{75} = 2.25 \text{ km}^2$$

$$0.86^2 = 0.7396 \text{ km}^2$$

$$\frac{36}{2.25} = 16$$

$$x = 2ab \cos \gamma.$$

$$\log x = \log 2 + \log a + \log b + \log \cos \gamma.$$



$$\begin{array}{r} 9'63'398 \\ 9 \\ \hline 9'63'389 \\ 0'44'20 \\ \hline 8'80 \end{array}$$

$$\log X = 0'04'551$$

$$X = 1'1105$$

$$\begin{array}{r} 0'30'103 \\ 0'17'609 \\ 0'93'450 -1 \\ \hline 9'63'389 -10 \\ \hline 11'04'551 -11 \end{array}$$

$$19_0 : 39 = 0'5$$

$$\begin{array}{r} 2'9896 \text{ km}^2 \\ 1'1105 \\ \hline 1'8791 \end{array}$$

$$C = \sqrt{1'8791 \text{ km}^2}$$

$$\log C = \frac{\log 1'8791}{\log 2}$$

$$\log C = 0'136975$$

$$C = 1'3708 \text{ km}$$

$$\frac{23 \cdot 0'1}{2'3}$$

$$\frac{0'27'393}{2}$$

$$0'27'395 : 2 = 0'136975$$

$$\frac{672}{25} \quad 25_0 : 32 = 0'8$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 13 \\ 19 \\ 15 \\ \hline 40 \end{array}$$

Lekcja 25.

16. XI. 37.

$$a:b = \sin \alpha : \sin \beta$$

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} &= \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}} = \\ &= \frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha-\beta}{2}}{\frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}}$$

Pierwszenie tangensowe.

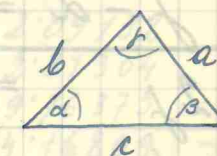
$$\begin{array}{l} 5:3 = 10:6 \\ 8:2 = 16:4 \end{array}$$

$$\underline{\underline{\tan \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b} \tan \frac{\alpha+\beta}{2}}}$$

$$I.) a = 123'4 \text{ dm}, c = 127'2 \text{ dm}, \beta = 110^\circ 15' 10''$$

$$II.) b; \alpha, \gamma, P.$$

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan \frac{\gamma+\alpha}{2}}{\tan \frac{\gamma-\alpha}{2}}$$



$$\tan \frac{\gamma-\alpha}{2} = \frac{c-a}{c+a} \tan \frac{\gamma+\alpha}{2}$$

$$\log \tan \frac{\gamma-\alpha}{2} = \log(c-a) + \log \tan \frac{\gamma+\alpha}{2} - \log(c+a)$$

$$\begin{array}{r} 0'57'978 \\ 9'84'318 -10 \\ \hline 10'42'296 -10 \\ -2'39'898 \\ \hline 8'02'398 -10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 127'2 \\ -123'4 \\ \hline = 3'8 \end{array}$$

$$\gamma + \alpha = 180^\circ - \beta$$

$$\begin{array}{r} 180^\circ \\ -110^\circ 15' 10'' \\ \hline 69^\circ 44' 50'' : 2 = \\ = 34^\circ 52' 25'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 127'2 \\ 123'4 \\ \hline 250'6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9'84'307 -10 \\ 11 \\ \hline 9'84'318 -10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0'45'25 \\ 225 \\ 90 \\ \hline 1125 \end{array}$$

$$\log \tan \frac{\gamma-\alpha}{2} = 8'02'398 -10$$

$$\frac{f-\alpha}{2} = 0^\circ 36' 19'' \quad \left| \begin{array}{l} 39400 : 1983 = 19 \\ 19570 \end{array} \right.$$

$$f - \alpha = 1^\circ 12' 38''$$

$$f = 1^\circ 12' 38'' + \alpha$$

$$f + \alpha = 180^\circ - \beta$$

$$f + \alpha = 69^\circ 44' 50''$$

$$f - \alpha = 1^\circ 12' 38''$$

$$2f = 70^\circ 57' 28''$$

$$f = 35^\circ 28' 44''$$

$$\alpha = 180^\circ - (f + \beta)$$

$$\alpha = 34^\circ 16' 06''$$

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta$$

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\log b = \log a + \log \sin \beta - \log \sin \alpha$$

180°	$9.97224 - 10$
$110^\circ 15' 10''$	$9.97228 - 10$
$69^\circ 44' 50''$	$9.75054 - 10$
0.0850	6.78031
400	1.86
	$9.75056 - 10$

$35^\circ 28' 44''$
$110^\circ 15' 10''$
$145^\circ 43' 54''$
180°
$145^\circ 43' 54''$
$34^\circ 16' 06''$

$$\log b = 2.31304$$

$$20 : 21 = 0.7$$

$$b = 20561 \text{ decm.}$$

$$P = \frac{1}{2} ab \sin f$$

$$\log P = \log a + \log b + \log \sin f - \log 2$$

0.3044	9.76360
1320	$13 - 10$

2.09132
2.31304
$9.76373 - 10$
$14.16809 - 10$
0.30103
$13.86706 - 10$

$$\log P = 3.86706$$

$$405 \quad 10 : 6 = 0.2$$

$$P = 7363.2 \text{ decm.}$$

Lekeja 26.

18. XI. 37.

1.) $a + b = 99 \text{ decm. } \alpha = 45^\circ; \beta = 26^\circ 33' 55''$

2.) $a; b; c$

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta$$

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$a = \frac{(99 - a) \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$a = \frac{99 \sin \alpha - a \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$a \sin \beta = 99 \sin \alpha - a \sin \alpha.$$

$$a \sin \alpha + a \sin \beta = 99 \sin \alpha.$$

$$a = \frac{99 \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta}.$$

$$a = \frac{99 \sin \alpha}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

$$\log a = \log 99 + \log \sin \alpha - (\log 2 + \log \sin \frac{\alpha + \beta}{2} + \log \cos \frac{\alpha - \beta}{2}).$$

$$\begin{array}{r} 0.30103 \\ 9.76677 \\ 17 -10 \\ \hline 9.99436 -10 \\ 20.06233 -20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.99564 \\ 9.84949 -10 \\ \hline 1.84513 -10 \\ -20.06233 -20 \\ \hline 1.78280 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9.99436 -10 \\ 0.03.2 \\ 0.06 \\ \hline 0.03.2 \\ 0.06 \end{array} \quad \begin{array}{r} 44^\circ 59' 60'' \\ 45^\circ \\ 26^\circ 33' 55'' \\ 18^\circ 26' 5'' : 2 = \\ 9^\circ 13' 2'' \end{array} \quad \begin{array}{r} 71^\circ 33' 55'' : 2 = \\ 35^\circ 46' 57'' \\ 0.29.57 \\ 2.03 \\ 14.5 \\ \hline 16.53 \end{array}$$

$$\log a = 1.78280.$$

$$4:7 = 0.6$$

$$a = 60.646 \text{ decm.}$$

Krótko droga - trójkąt. tangens.

$$a + b = 99 \text{ decm.}$$

$$b = \frac{99}{60.646} = 38.354$$

$$b = 38.354 \text{ decm.}$$

$$a : c = \sin \alpha : \sin \beta.$$

$$c = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}.$$

$$\log c = \log a + \log \sin \beta - \log \sin \alpha.$$

$$\begin{array}{r} 55.0.07 \\ 385 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.78280 \\ 9.97708 -10 \\ 4 \end{array}$$

$$\log c = 1.91043.$$

$$c = 81.364 \text{ decm.}$$

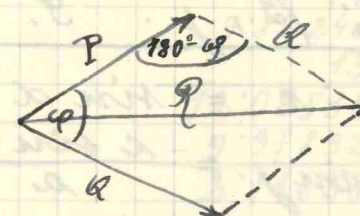
Lekcja 27.

19. XI. 37.

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos(180^\circ - \varphi).$$

$$\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi.$$

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \varphi.$$



$$P = \frac{1}{2} ac \sin \beta.$$

$$\log P = \log 187.4 + \log 179.8 + \log \sin 41^\circ 38' 53'' - \log 2.$$

$$\log P = 4.04893.$$

$$P = 1119.27 \text{ m.}$$

$$\begin{array}{r} 2.27277 \\ 2.25479 \\ 9.82240 -10 \\ 14.34996 -10 \\ 0.30103 \\ 14.04893 -10 \end{array}$$

Zadanie.

1.) $a + b = 750$... $a : b = 8 : 7$
 $\alpha = 135^\circ 17'$

22. XI. 37.

2.) $a, b, c; \beta, \gamma$

$$a = 750 - b$$

$$b = \frac{7a}{8}$$

$$a = 750 - \frac{7a}{8}$$

$$8a = 6000 - 7a$$

$$15a = 6000$$

$$a = 400 \text{ m.}$$

$$b = \frac{2800}{8}$$

$$b = 350 \text{ m.}$$

$$\begin{array}{r} 180^\circ \\ 135^\circ 17' \\ 44^\circ 43' \end{array}$$

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta.$$

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$$

$$\log \sin \beta = \log b + \log \sin \alpha - \log a$$

$$\begin{array}{r} +1.239140 -1 \\ 2.60206 \\ 0.78934 -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2.54407 \\ 9.84733 -10 \\ 12.39140 -10 \\ 2.60206 \\ 9.78934 -10 \end{array}$$

$$\log \sin \beta = 9.78934 -10$$

$$\beta = 38^\circ$$

$$\begin{array}{r} 135^\circ 17' \\ 38^\circ \\ 173^\circ 17' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 180^\circ \\ 173^\circ 17' \\ 6^\circ 43' \end{array}$$

$$\gamma = 6^\circ 43'$$

$$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$$

$$c = \frac{a \sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$\log c = \log a + \log \sin \alpha - \log \sin \gamma$$

$$\log c = 1.82277$$

$$\begin{array}{r} 2.60206 \\ 2.76 \\ 10 : 6 = 0.16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2.60206 \\ 9.06804 -10 \\ 11.67010 -10 \\ -9.84733 -10 \\ 1.82277 \end{array}$$

$$c = 66.491 \text{ m.}$$

IV. Dane są trzy boki trójkąta;
rozwiązać ten trójkąt.

1.) a, b, c .

2.) α, β , i P .

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Wzrost Herona.

$$a+b+c=2s.$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

$$2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2.$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$1 - \cos \alpha = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$1 + \cos \alpha = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(b+c+a)(b+c-a)}$$

$$\begin{aligned} -a+b+c &= 2(s-a) \\ a-b+c &= 2(s-b) \\ a+b-c &= 2(s-c) \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2(s-b) \cdot 2(s-c)}{2s \cdot 2(s-a)}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \\ \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{aligned}$$

Zadanie.

1.) $a = 76 \text{ m}$, $b = 157.9 \text{ m}$, $c = 133.9 \text{ m}$.

2.) α, β , i P .

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\log(s-b) + \log(s-c) - [\log s + \log(s-a)]}{2}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0.40817 - 1.$$

$$2s = a + b + c.$$

$$s = 183.9$$

183.9	183.9	183.9
-157.9	-133.9	-76
26.0	50.0	107.9

1.41497	2.26458
1.69897	2.03302
+2.311394 -2	4.29760
-4.29760	

$$0.81634 -2 : 2 = 0.40817 -1.$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0.40817 -1. = 9.40817 -10.$$

$$\frac{\alpha}{2} = 14^{\circ} 21' 25''.$$

$$\alpha = 28^{\circ} 42' 50''.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\log(s-a) + \log(s-b) - [\log s + \log(s-c)]}{2}.$$

2.03302	2.26458
1.69897	1.41497
3.73199	3.67955
3.67955	
0.05244 : 2 = 0.02622.	

$$\log \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 0.02622.$$

76
157.9
133.9
367.8 : 2 = 183.9
16
= 7
18

$$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 10.02622 -10.$$

$$\frac{\beta}{2} = 46^{\circ} 43' 43'', \quad \frac{604}{120} : 42 = 43$$

$$\beta = 93^{\circ} 27' 26''.$$

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{f}{2} = \frac{\log(s-a) + \log(s-b) - [\log s + \log(s-c)]}{2}.$$

2.03302	2.26458
1.41497	1.69897
+2.344799 -1	3.96355
3.96355	
0.48444 -1	
-1.48444 : 2 = -0.74222.	
+0.48444 -1	
1.48444 -2 : 2 = 0.74222 -1.	

$$\log \operatorname{tg} \frac{f}{2} = 9.74222 -10.$$

$$\frac{f}{2} = 28^{\circ} 54' 52'', \quad \frac{196}{100} : 50 = 52$$

$$f = 56^{\circ} 108' 104''.$$

$$f = 57^{\circ} 49' 44''.$$

$$Q = \frac{1}{2} ab \sin f.$$

$$\log Q = \log a + \log b + \log \sin f - \log 2.$$

$$\begin{array}{r} 183.9 \\ - 157.9 \\ \hline 26.0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.4149 \\ 1.6989 \\ \hline + 2.31139 \\ - 4.29760 \\ \hline 0.8163 \end{array}$$

$\log t_2$

t_2

$t_2 \frac{B}{2}$

$\log t_2$

$\log t$

$$\begin{array}{r} 1.88081 \\ 2.19838 \\ 9.92755 \\ \hline 6 \\ \hline 14.00680 \\ - 0.30103 \\ \hline 13.70577 \end{array} \quad \begin{array}{r} 44.013 \\ 132 \\ \hline 572 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14.00680 \\ - 0.30103 \\ \hline 13.70577 \end{array} \quad \begin{array}{r} -10 \\ -10 \\ -10 \end{array}$$

$$\log P = 3.70577$$

$$P = 5078.89 \text{ m.} \quad \begin{array}{r} 569 \\ 80 \cdot 9 = 0.89 \end{array}$$

Φ Kaezov, dnia 24. XI. 37.

