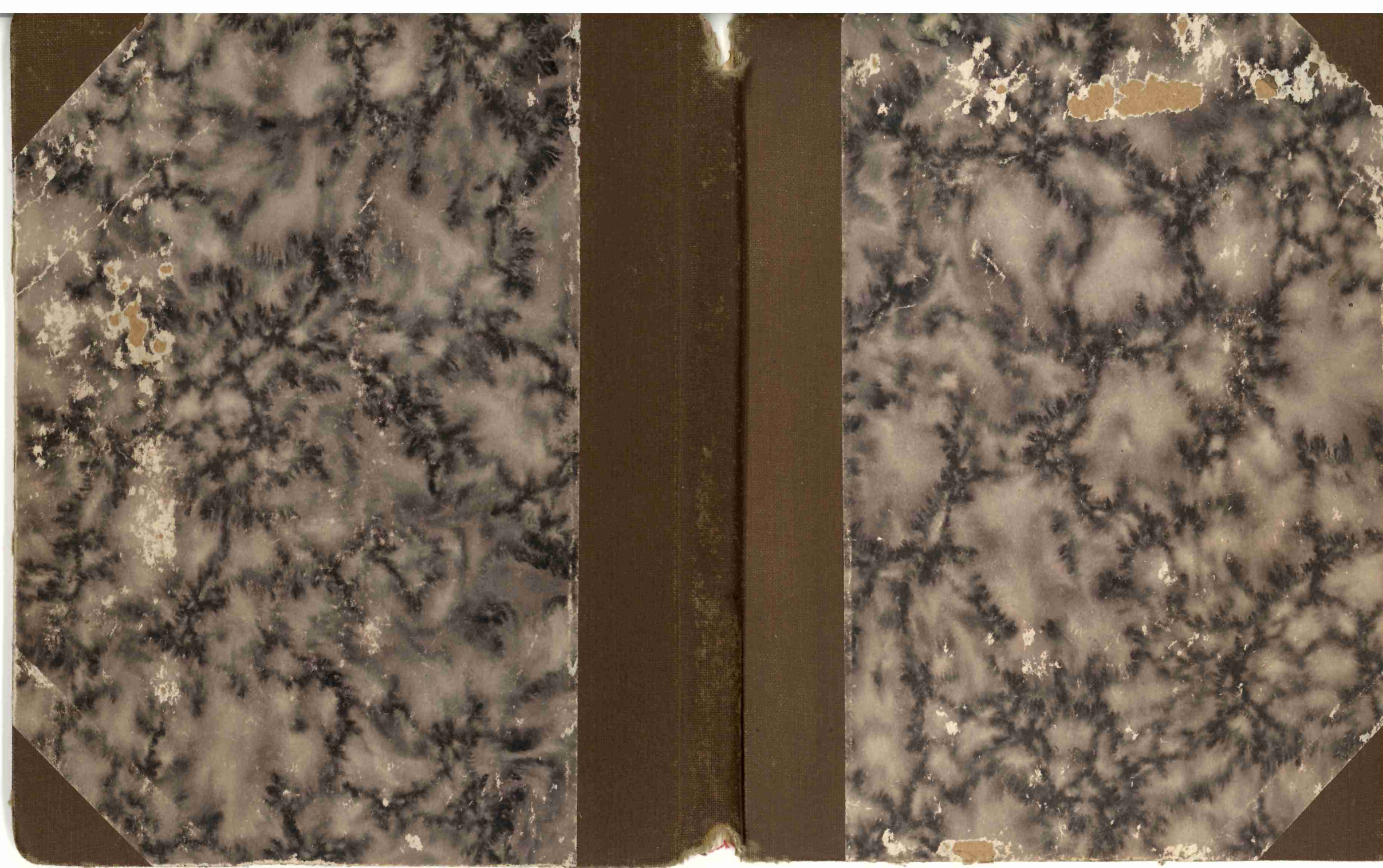




Математика

Баротапан
кл. VII.

Zadanie.

1. XII. 37.

$$D.) d_1 = 210 \text{ m.} \quad d_2 = 197 \text{ m.}$$

$$\alpha = 57^\circ 34'.$$

L.) P .

$$P = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha.$$

$$\log P = \log d_1 + \log d_2 + \log \sin \alpha - \log 2.$$

$$\log P = 4.24201.$$

$$\frac{180}{210} : 24 = 0.9$$

$$P = 17459 \text{ m}^2.$$

$$\begin{array}{r} 2.32222 \\ 2.29447 \\ \hline 9.92635 \quad -10 \\ 14.54304 \quad -10 \\ \hline 0.30103 \\ 14.24201 \quad -10 \end{array}$$

Lekcja 32.

2. XII. 37.

$$D.) a - b = 15 \text{ m.}$$

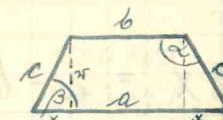
$$a^2 + b^2 = 425 \text{ m}^2.$$

$$c = \sqrt{ab}.$$

$$L.) a, b, c; \alpha, \beta.$$

$$b^2 = ac.$$

$$b = \sqrt{ac}.$$



$$s_A = \frac{a+b}{2}.$$

$$s_g = \sqrt{ab}.$$

$$a:b = b:c \rightarrow \text{prop. ciągła.}$$

$$a:b:c = a':b':c' \rightarrow \text{prop. bieżąca.}$$

$$a = 15 + b.$$

$$(15+b)^2 + b^2 = 425.$$

$$225 + 30b + b^2 + b^2 = 425.$$

$$2b^2 + 30b - 200 = 0.$$

$$b^2 + 15b - 100 = 0.$$

$$b = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 400}}{2}$$

$$b = \frac{-15 \pm 25}{2}$$

$$b_1 = 5 \text{ m.}$$

$$b_2 = -20 \text{ m.}$$

$$a = 20 \text{ m.}$$

$$c = \sqrt{ab}.$$

$$c = 10 \text{ m.}$$

$$2x = a - b$$

$$x = \frac{a-b}{2}$$

$$\frac{a-b}{2} = c \cos \beta.$$

$$\cos \beta = \frac{\frac{a-b}{2}}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a-b}{2c}.$$

$$\log \cos \beta = \log(a-b) - (\log 2 + \log c).$$

$$\begin{array}{r} 0.30103 \\ 1.00000 \\ \hline 1.30103 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +10 \quad 1.17609 \quad -10 \\ 1.30103 \\ \hline 9.87506 \quad -10 \end{array}$$

$$\log \cos \beta = 9.87506 - 10.$$

$$\frac{501}{120} : 0.19 = 26$$

$$\beta = 41^\circ 25' - 26''.$$

$$\beta = 41^\circ 24' 34''.$$

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta.$$

$$\sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{b}$$

$$\log \sin \alpha = \log a + \log \sin \beta - \log b.$$

$$\begin{array}{r} 0.2434 \\ 96 \\ 72 \\ \hline 8.16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.30103 \\ 9.82041 \quad -10 \\ 8 \\ \hline 11.12152 \quad -10 \\ 0.69897 \\ \hline 10.42255 \quad -10 \end{array}$$

$$\log \sin \alpha = 10.42255 - 10.$$

$$\log \sin \alpha_1 = 10 - 10.$$

$$\alpha_1 = 90^\circ.$$

$$\alpha_2 = ?$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2.$$

$$\sqrt{\frac{a-b}{2}} = c \cos \alpha_2.$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{a-b}{2c}.$$

$$\log \cos \alpha_2 = \log(a-b) - (\log 2 + \log c).$$

$$\alpha_2 = 41^\circ 24' 34''.$$

$$\alpha = 131^\circ 24' 34''.$$

$$\frac{a-b}{2} = c \sin \alpha_2.$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{a-b}{2c}.$$

$$\log \sin \alpha_2 = \log(a-b) - (\log 2 + \log c).$$

$$\log \sin \alpha_2 = 9.87506 - 10.$$

$$\begin{array}{r} 501 \\ 500 : 079 = 26 \\ 120 \end{array}$$

$$\alpha_2 = 48^\circ 35' 26''.$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2.$$

$$\alpha = 90^\circ + 48^\circ 35' 26''.$$

$$\alpha = 138^\circ 35' 26''.$$

$$\begin{array}{r} 138^\circ 35' 26'' \cdot 2 \\ 276^\circ 70' 52'' \end{array}$$

$$277^\circ 10' 52''.$$

$$\begin{array}{r} 41^\circ 24' 34'' \cdot 2 \\ 82^\circ 48' 68'' \\ 277^\circ 10' 52'' \\ 359^\circ 58' 120'' \\ 1360^\circ \end{array}$$

Zadanie.

2. XII. 37.

$$1.) a+b+c = 52 \text{ cm.} \quad a-b = 3 \text{ cm.}$$

$$b-c = 2 \text{ cm.}$$

$$2.) a, b, c; \alpha, \beta, \gamma.$$

$$a+b+c = 52.$$

$$a-b = 3.$$

$$b-c = 2.$$

$$b = 2+c.$$

$$a+2+2c = 52.$$

$$a+2c = 50.$$

$$a-2-c = 3.$$

$$a-c = 5.$$

$$a+2c = 50.$$

$$-a+c = -5.$$

$$3c = 45.$$

$$c = 15 \text{ cm.}$$

$$b = 2+c.$$

$$b = 17 \text{ cm.}$$

$$a = 3+b.$$

$$a = 20 \text{ cm.}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\log(s-b) + \log(s-c) - [\log s + \log(s-a)]}{2}$$

$$\begin{aligned} a &= 20 \text{ mm.} \\ b &= 17 \text{ " } \\ c &= 15 \text{ " } \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2s &= a + b + c \\ 2s &= 52 \\ s &= \frac{52}{2} = 26. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 0.95424 \\ 1.04139 \\ +10 1.99563 -10 \\ - 2.19312 \\ \hline 9.80251 -10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.41497 \\ 0.77815 \\ \hline 2.19312 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +5 \\ 2 = 4.90125 -5 \\ \hline 9.90125 -10 \end{array}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 9.90125 -10.$$

$$\frac{\alpha}{2} = 38^{\circ} \overset{32}{28'} \overset{10}{30''}$$

$$\alpha = 76^{\circ} \overset{64}{56'} 60''$$

$$\alpha = 76^{\circ} 57' \quad \alpha = 77^{\circ} 5'$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\log(s-a) + \log(s-c) - [\log s + \log(s-b)]}{2}$$

$$\begin{array}{r} 1.41497 \\ 0.95424 \\ \hline 2.36921 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.77815 \\ 1.04139 \\ +20 1.81954 -20 \\ - 2.36921 \\ \hline 19.45033 -20:2 \end{array}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 9.72516 -10.$$

$$\frac{\beta}{2} = 38^{\circ} \overset{506}{28'} \overset{490}{30''}$$

$$\beta = 77^{\circ} 56' 58''$$

$$\frac{\beta}{2} = 27^{\circ} 58' 19''$$

$$\beta = 54^{\circ} 116' 38''$$

$$\alpha = 77^{\circ} 5'$$

$$131^{\circ} 121' 38''$$

$$\gamma = 36^{\circ} 58' 22''$$

$$\beta = 55^{\circ} 56' 38''$$

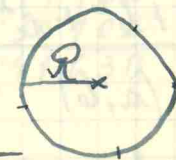
$$\begin{array}{r} 180^{\circ} \\ - 133^{\circ} \quad 1' \quad 38'' \\ \hline 36^{\circ} \quad 58' \quad 22'' \end{array}$$

Lekeja 33.

9. XII. 37.

$$1.) R = 1 \text{ m.}$$

$$a : b : c : d = 1 : 2 : 3 : 4.$$



$$2.) Q.$$

$$Q = I. + II. + III. + IV.$$

$$Q = \frac{1}{2} R^2 \sin 36^{\circ} + \frac{1}{2} R^2 \sin 72^{\circ} + \frac{1}{2} R^2 \sin 108^{\circ} + \frac{1}{2} R^2 \sin 144^{\circ}$$



$$Q = \frac{1}{2} R^2 (\sin 36^{\circ} + \sin 72^{\circ} + \sin 108^{\circ} + \sin 144^{\circ})$$

$$Q = \frac{1}{2} R^2 (\sin 36^{\circ} + \sin 72^{\circ} + \sin 72^{\circ} + \sin 36^{\circ})$$

$$Q = \frac{1}{2} R^2 (4 \sin 36^{\circ} + 2 \sin 72^{\circ})$$

$$Q = R^2 (\sin 36^{\circ} + \sin 72^{\circ})$$

$$Q = R^2 \left(2 \sin \frac{72^{\circ} + 36^{\circ}}{2} \cos \frac{72^{\circ} - 36^{\circ}}{2} \right)$$

$$P = 2R^2 \sin 54^\circ \cos 18^\circ.$$

$$\log P = \log 2 + 2 \log R + \log \sin 54^\circ + \log \cos 18^\circ.$$

$$\log P = 0.18720$$

0.30103	
9.90796	-10
9.97821	-10
20.18720	-20

$$\frac{696}{240} : 28 = 0.8$$

$$P = 15388 \text{ m.}$$

Q.) $a:b:c:d = 2:3:5:4$
 $a^2+b^2+c^2+d^2 = 486 \text{ m.}^2$
 $\angle(a,b) = 105^\circ$

Q.) $a, b, c, d; P.$

$$a:b = 2:3 \quad b = \frac{3a}{2}$$

$$a:c = 2:5 \quad c = \frac{5a}{2}$$

$$a:d = 2:4 \quad d = \frac{4a}{2}$$

$$a^2 + \frac{9a^2}{4} + \frac{25a^2}{4} + \frac{16a^2}{4} = 486.$$

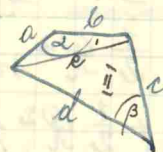
$$a^2 + \frac{50a^2}{4} = 486.$$

$$\frac{4a^2 + 50a^2}{4} = 486.$$

$$54a^2 = 1944.$$

$$a^2 = 36.$$

$$a = 6 \text{ m.}$$



$$\frac{1944}{54} = 36$$

$$b = 9 \text{ m.}$$

$$c = 15 \text{ m.}$$

$$P = P_1 + P_2.$$

$$P_1 = \frac{1}{2} ab \sin \phi.$$

$$\log P_1 = \log a + \log b + \log \sin \phi - \log 2.$$

$$\log P_1 = 1.41630.$$

$$\frac{614}{160} : 17 = 0.9$$

$$P_1 = 26079 \text{ m.}^2$$

$$\sin 105^\circ = \sin 75^\circ.$$

0.77815	
0.95424	
9.98494	-10
11.71733	-10
-0.30103	
11.41630	-10

$$P_2 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$P_2 = \sqrt{s(s-e)(s-c)(s-d)}.$$

$$e = \sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cos \beta}.$$

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi}.$$

$$\log e = 2 \log a + 2 \log b - \log 2 - \log \cos \phi.$$

$$X = 2ab \cos \phi.$$

$$\log X = \log 2 + \log a + \log b + \log \cos \phi.$$

$$\begin{array}{r}
 0.30103 \\
 0.77815 \\
 0.95424 \\
 9.41380 \quad -10 \\
 \hline
 11.44642 \quad -10 \\
 4 \\
 1.44642
 \end{array}$$

$$\log X = 1.44642$$

$$\frac{638}{4} = 16 = 0.2$$

$$X = 27.952.$$

$$e = \sqrt{36 + 81 - 27.952}.$$

$$e = \sqrt{89.048} = 9.436 \text{ m.}$$

$$\begin{array}{l}
 804 : 184.4 \\
 -6880 : 1883.3 \\
 12310.0 : 1886
 \end{array}$$

$$P_2 = \sqrt{s(s-e)(s-c)(s-d)}.$$

$$2s = e + c + d.$$

$$2s = 9.436$$

$$15$$

$$12$$

$$36.436 : 2$$

$$s = 18.218.$$

$$s - e = 9.436$$

$$8.782.$$

$$s - c = 3.218.$$

$$s - d = 6.218.$$

$$\begin{array}{r}
 36 \\
 81 \\
 \hline
 127 \quad 117 \\
 27.952 \\
 89.048
 \end{array}$$

$$\log P_2 = \frac{\log s + \log(s-e) + \log(s-c) + \log(s-d)}{2}.$$

$$\log P_2 = 1.75266.$$

$$P_2 = 56.58 \text{ m}^2.$$

$$\begin{array}{r}
 56.58 \\
 26.079 \\
 \hline
 82.659
 \end{array}$$

$$P = 82.659 \text{ m}^2.$$

Lekcja 34.

10. XII. 37.

Miary kąta.

Mamy dwie miary kąta: 1.) miara praktyczna albo stopniowa, przy której kąt mierzymy stopniami i wyrażamy w stopniach. Praktyczną jednostką kąta jest 1 stopień; (jest to 90 części kąta prostego). 2.) Miara teoretyczna

albo łukowa.

$$L = \frac{r \pi \alpha}{180^\circ}$$

$$L 180^\circ = r \pi \alpha$$

$$\alpha = \frac{180^\circ L}{\pi r}$$

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{L}{r}$$

$$y = a \cdot x$$

zau. zależ.

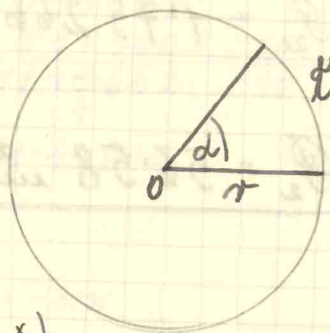
Kąt α jest proporcjonalny do stosunku $L : r$ i stąd bierzemy ten stosunek za miarę kąta α .

W teoretycznej (łukowej) mierze kąta, miarą kąta jest stosunek łuku odpowiadającego kątowi α (jako kątowi środkowemu w kole), do promienia tego kąta.

$$\alpha = \frac{L}{r}$$

Gdy $r = 1$.

Wtedy $\alpha = L$.



Miarą kąta jest łuk odpowiadający temu kątowi (jako kątowi środk.) w kole o promieniu równym jednostce.

Gdy $L = r$,

to $\alpha = 1$ radian.

Teoreti. jednostką kąta jest jeden radian. Jeden radian jest to kąt, któremu odpowiada łuk równy promieniowi.

Lekcja 35.

14. XII. 37.

Związek miary jednostki praktycznej a teoretycznej.

$$360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad.}$$

$$180^\circ = \pi \text{ rad.}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} (= 57^\circ 17' 44.8'' = 57.296^\circ)$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad.} (= 0.017453 \text{ rad.})$$

$$90^\circ = 90 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

$$\underline{l = \alpha r.}$$

$$l = \frac{r \pi \alpha}{180^\circ}$$

$$s = l \cdot \frac{r}{2}$$

$$\underline{s = \frac{r^2 \alpha}{2}}$$

$$s = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ}$$

Indukcja matemat.

$$a_2 = a_1 + d.$$

$$a_3 = a_2 + d.$$

$$a_3 = a_1 + 2d.$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d.$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

$$\text{z.) } \underline{a_n = a_1 + (n-1)d.}$$

$$\text{p.) } \underline{a_{n+1} = a_1 + nd.}$$

$$\text{p.) } a_{n+1} = a_n + d = a_1 + (n-1)d + d = \underline{a_1 + nd.}$$

$$a_2 = a_1 \cdot q.$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2.$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3.$$

$$\text{z.) } \underline{a_n = a_1 \cdot q^{(n-1).}}$$

$$\text{p.) } \underline{a_{n+1} = a_1 \cdot q^n}$$

$$\text{p.) } a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = \underline{a_1 \cdot q^n.}$$

Wzór Newtona

na dowolnie do n-tej potęgi.

$$(a+b)^1 = a+b.$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

- 1.) Prawidłowość co do liczby wyrazów.
- 2.) Wykładniki potęg. przy pierwszym wyrazie maleją, przy drugim rosną, a ich suma w każdym wyrazie równa się wykładnikowi potęgowemu.

Lekcja 36.

16. XII. 37.

- 3.) Współczynniki równo oddalone od początku i od końca są sobie równe.
- 4.) Współczynniki te rzucając się wzajemnie:

		1		1			
		1	2	1			
	1	3	3	1			
	1	4	6	4	1		
	1	5	10	10	5	1	
	1	6	15	20	15	6	1
1	7	21	35	35	21	7	1
18	28	56	70	56	28	8	1
9	36	84	126	126	84	36	9

itd.

Symbol: Wzrost Newtona.

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots [n-(r-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots r}$$

$$\binom{7}{5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 21.$$

$$\binom{n}{1} = n.$$

$$\binom{n}{n} = 1.$$

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ (umowa).}$$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b.$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2.$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3.$$

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4.$$

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5.$$

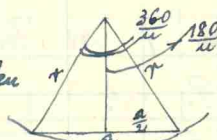
$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n-3}a^3b^{n-3} + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

9.) r .
 10.) a ; P (n -boku foremn. wpisanego)

$$\frac{a}{2} = r \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$a = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$$

Rok wieloboku
 for. wpis.



$$n = 3; a = r\sqrt{3} \quad \text{bok trójkąta wpisanego}$$

$$n = 4; a = r\sqrt{2} \quad \text{" kwadratu "}$$

$$n = 6; a = r \quad \text{" sześcioboku "}$$

$$P = \frac{n r^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}$$

Wzór na powierzenie
 n -boku foremnego wpi-
 tanego w koło.

Zadanie.

11. I. 38.

Obliczyć obwód i pole umiarkowanego $n = 15$ -boku wpisanego w koło o promieniu $r = 2.5$ m.

9.) r .

10.) a ; P .

$$O_n = a \cdot n$$

$$P = \frac{a \cdot n}{2} \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$\frac{a}{2} = r \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$a = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$O_n = 2r \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot n$$

$$\log O_n = \log 2 + \log r + \log \sin \frac{180^\circ}{n} + \log n$$

$$0.30103$$

$$0.39794$$

$$9.34788$$

$$1.17609$$

$$12.19294$$

$$-10$$

$$-20$$

$$\frac{180}{30} : 15 = 12$$

$$30$$

$$\frac{360}{60} : 15 = 24$$

$$= 60$$

$$\log O_n = 1.19294$$

$$285$$

$$= 90 : 27 = 0.3$$

$$O_n = 15.593 \text{ m.}$$

$$P = \frac{n r^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}$$

$$P = \frac{15 \cdot (2.5)^2}{2} \sin 24^\circ$$

$$\log P = \log 15 + 2 \log 2.5 + \log \sin 24^\circ - \log 2$$

$$1.17609$$

$$0.79588$$

$$9.00931$$

$$11.58728$$

$$-0.30103$$

$$11.28025$$

$$-20$$

$$0.39794 \cdot 2$$

$$0.79588$$

$$\log P = 1.28025$$

$$0.12$$

$$130 : 23 = 0.5$$

$$P = 19.65 \text{ m}^2$$

W klasie.

13. I. 38.

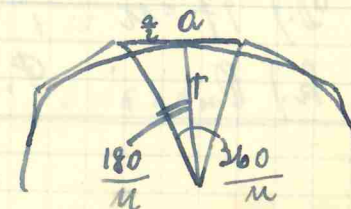
9.) r .

10.) a ; P (n -boku foremn. opisanego)

$$\frac{a}{2} = r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

$$a = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

bok
 wielok.
 opisan.



$$u = 3; a = 2 + \operatorname{tg} 60^\circ = \boxed{2 + \sqrt{3}}$$

$$u = 4; a = 2 + \operatorname{tg} 45^\circ = \boxed{2 + 1}$$

$$u = 6; a = 2 + \operatorname{tg} 30^\circ = \boxed{2 + \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\Phi = u \left(\frac{1}{2} a r \right)$$

$$\Phi = u \left(\frac{2r^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{u}}{2} \right)$$

$$\boxed{\Phi = u r^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{u}}$$

Pole wieloboku
forem. opisanego.

$$\Phi = \frac{u a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{u}$$

$$\Phi = \frac{u (2 + \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{u})^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{u}$$

$$\Phi = \frac{u 4 + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{180^\circ}{u}}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{u}$$

$$\Phi = u r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{180^\circ}{u} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{u}}$$

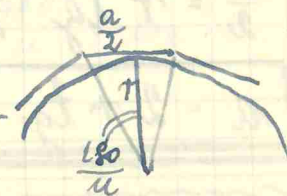
$$\Phi = u r^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{u}$$

Zadanie.

Obliczyć obwód i pole nmiarowego wielokąta
u = 17 opisanego na kole o promieniu r = 4.8 dm

a.) $17 = u$; $r = 4.8$ dm

b.) O_n ; P .



$$O_n = a n$$

$$\frac{a}{2} = r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{u} ; a = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{u}$$

$$O_n = 2u r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{u}$$

$$180 : 17 = 10^\circ 35' 17''$$

$$10^\circ = 600'$$

$$90' = 5400''$$

$$5400' + 300'' = 5700''$$

$$5700'' : 17 = 335''$$

$$335'' = 5' 35''$$

$$O_{17} = 2 \cdot 17 \cdot 4.8 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{u}$$

$$\log O_{17} = \log 34 + \log 4.8 + \log \operatorname{tg} 10^\circ 35' 17''$$

$$1.53148$$

$$0.68124$$

$$9.27168 - 10$$

$$11.48440 - 10$$

$$430$$

$$10 : 14 = 0.712$$

$$20$$

$$30$$

$$O_{17} = 30.50712 \text{ dm}$$

$$\Phi = u r^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{u}$$

$$P = 17 \cdot 23.04 \operatorname{tg} 10^\circ 35' 17'' = 10^\circ 35' 17''$$

$$\log P = \log 17 + \log 23.04 + \log \operatorname{tg} 10^\circ 35' 17''$$

$$1.23045$$

$$1.36248$$

$$9.27168 - 10$$

$$11.86461 - 10$$

$$457$$

$$4 : 6 = 0.66$$

$$\log P = 11.86461 - 10$$

$$P = 73.216666 \text{ dm}^2$$

1.) $n = 11$; $l_n = 69.85 \text{ cm}$

2.) r ; R .

$$\frac{a}{2} = R \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

$$O = n a$$

$$O = \frac{O}{n}$$

$$R = \frac{O}{n 2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

$$\frac{a}{2} = r \tan \frac{180^\circ}{n}$$

$$r = \frac{a}{2 \tan \frac{180^\circ}{n}}$$

$$O = n a$$

$$a = \frac{O}{n}$$

$$r = \frac{O}{2 n \tan \frac{180^\circ}{n}}$$

$$\log R = \log O - (\log 2 + \log n + \log \sin \frac{180^\circ}{n})$$

$$\log R = \begin{array}{r} 1.84417 \\ 0.79224 \\ \hline 1.05193 \\ 192 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.30103 \\ 1.04139 \\ 9.44948 - 10 \\ 34 \\ \hline 10.79224 - 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.7248 \\ 576 \\ 288 \\ \hline 3456 \end{array}$$

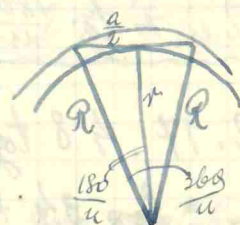
$$\begin{array}{r} 1.139 \\ 100 \\ 220 \\ \hline \end{array} = 0.027$$

$$R = 11.37027$$

$$180 : 11 = 16^\circ 21' 48''$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ 4.60 = 240 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ 9.60 = 540 \end{array}$$



dale $n = 60$ - cis bokm forem. wynosi 313.578 m ;
obliczy' promieni' koła opisanego na tym wielob.

1.) P ; n .

2.) r (koła opisanego na n -boku)

$$P = \frac{n r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}}{2}$$

$$2P = n r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$$

$$r^2 = \frac{2P}{n \sin \frac{360^\circ}{n}}$$

$$r = \sqrt{\frac{2P}{n \sin \frac{360^\circ}{n}}}$$

$$\log r = \frac{\log 2 + \log P - (\log n + \log \sin \frac{360^\circ}{n})}{2}$$

$$\begin{array}{r} 14.078 \\ 312 \\ \hline 10.92 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.77815 \\ 9.01923 - 10 \\ \hline 10.79738 - 10 \end{array}$$

$$\log r = 1.00000$$

$$r = 10$$

$$0.30103$$

$$2.49624$$

$$11$$

$$2.79738$$

$$0.79738$$

$$2$$

Przegląd granic (ciężkości, granic, wielkości, umiast.)

Stereometria przy pomocy trygonometrii.

1.) $a = 5.6 \text{ dm}$, $b = 8.4 \text{ dm}$; $\angle \alpha = 39^\circ 15' 10''$
 $c = 10.5$; $\beta = 75^\circ 13' 14''$

2.) V .

$$V = Ph.$$

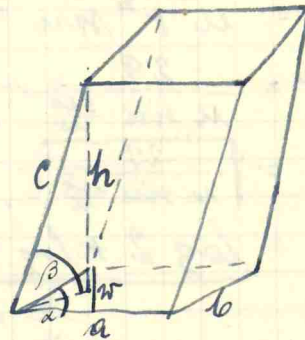
$$P = ab \sin \alpha$$

$$h = c \sin \beta$$

$$P = ab \sin \alpha$$

$$h = c \sin \beta$$

$$V = abc \sin \alpha \sin \beta.$$



Zadanie.

Podstaw granic jest trójkąt, w którym znamy $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 70^\circ 13'$, $R = 5 \text{ dm}$; krawędź boczna $s = 7 \text{ dm}$ jest nachylna do podstawy pod kątem $\varphi = 60^\circ$. Obliczyć V granic.

1.) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 70^\circ 13'$, $R = 5 \text{ dm}$.

$s = 7 \text{ dm}$, $\varphi = 60^\circ$.

2.) $V = ?$

$$V = Ph.$$

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad [a = 2R \sin \alpha]$$

$$a = 2R \sin \alpha$$

$$b = 2R \sin \beta$$

$$c = 2R \sin \gamma.$$

$$0.76791$$

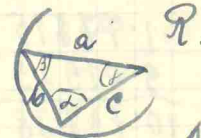
$$0.76604$$

$$109 - 187$$

$$1' - 18.7$$

$$7' - 18.7.7$$

$$130.9$$



$$0.76604$$

$$13$$

$$0.76617$$

$$a = 7.66 \text{ dm}.$$

$$b = 9.41 \text{ dm}.$$

$$c = 8.54 \text{ dm}.$$

$$0.94068$$

$$0.94068$$

$$180^\circ$$

$$121^\circ 23'$$

$$58^\circ 37'$$

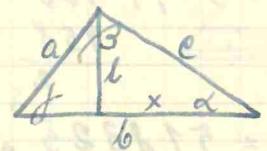
$$0.85264$$

$$0.85264$$

$$10' - 152$$

$$1' - 15.2.7$$

$$7' - 106.4$$



$$l = a \sin \gamma$$

$$l = 7.66 \cdot 0.85370$$

$$0.85370 \cdot 7.66$$

$$597590$$

$$597590$$

$$65393420$$

NM klasa.

25.1.38.

1.) $h = 10 \text{ dm}$, $a = 40.52 \text{ dm}$, ilość przekąt. 170.

2.) V .

$$170 = (u-3)u$$

$$340 = u^2 - 3u$$

$$u^2 - 3u - 340 = 0.$$

$$u = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 1360}}{2}$$

$$u = \frac{3 \pm 37}{2}$$

$$u = 20.$$

$$u' = -18.$$

$$V = Ph$$

$$P = \frac{ua^2}{4} \sin \frac{180^\circ}{u}$$

$$V = \frac{ua^2}{4} \sin \frac{180^\circ}{u} h.$$

$$\sqrt{1369} = 37$$

$$469 : 67.7$$

$$\log V = (\log h + \log u + 2 \log a + \log \sin \frac{180}{u}) - \log 4$$

$$\begin{array}{r} 1.00000 \\ 1.30103 \\ 3.21534 \\ 10.80029 \quad -10 \\ \hline 16.31666 \quad -10 \\ -0.60206 \\ \hline 15.71460 \quad -10 \end{array}$$

$$\frac{1.60767 \cdot 2}{3.21534}$$

$$\log V = 5.71460$$

$$\frac{458}{2.0} : 8 = 0.25$$

$$V = 518325 \text{ dm}^3$$

Radanie.

$$Q.) V = 250 \text{ m}^3; R = 6.5, u = 5$$

$$h.) h.$$

$$V = Rh$$

$$h = \frac{V}{R}$$

$$R = \frac{u R^2}{2} \sin \frac{360}{u}$$

$$h = \frac{2V}{u R^2 \sin \frac{360}{u}}$$

$$\log h = \log 2 + \log V - (\log u + 2 \log R + \log \sin \frac{360}{u})$$

$$0.30103$$

$$2.39794$$

$$2.69897$$

$$2.30300$$

$$\log h = 0.39597$$

$$\frac{585}{12.0} : 17 = 0.7$$

$$0.69897$$

$$1.62582$$

$$9.97821 \quad -10$$

$$0.81291 \cdot 2$$

$$h = 2.4887 \text{ m}$$

Przedy okregle (walce, ^{noski, bryly obrot.} Walec.)

3.11.38.

$$Q.) a = 8.4 \text{ dm}$$

$$\alpha = 70^\circ 15'$$

$$h.) V = ?$$

$$[V = 2r^2 \pi]$$

$$V = r^2 \pi h$$

$$V = \frac{a^2}{4} \pi a \sin \alpha$$

$$[r = \frac{a}{2}]$$

$$V = \frac{a^2 \pi a \sin \alpha}{4}$$

$$\log V = 2 \log a + \log \pi + \log a + \log \sin \alpha - \log 4$$

$$Q.) a, \alpha$$

$$h.) \phi, V$$

$$\phi = 2r \pi (r + h)$$

$$r = a \cos \alpha$$

$$h = a \sin \alpha$$

$$\phi = 2a \cos \alpha \pi (a \cos \alpha + a \sin \alpha)$$

$$\phi = 2a^2 \cos \alpha \pi (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

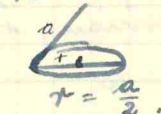
$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) + \sin \alpha =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin 45^\circ \cos(45^\circ - \alpha)$$

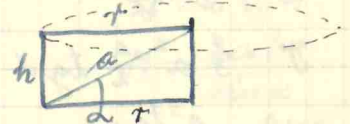
$$\phi = 4a^2 \pi \cos \alpha \sin 45^\circ \cos(45^\circ - \alpha)$$



$$h = a \sin \alpha$$



$$r = \frac{a}{2}$$



$$r = a \cos \alpha$$

$$h = a \sin \alpha$$

$$V = r^2 \pi h$$

$$V = a^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$$

$$\log V = 3 \log a + \log \pi + 2 \log \cos \alpha + \log \sin \alpha$$

Ostrosłup.

kwadrat, sześciąt, ośmiościan.

a, α

φ, V

$$V = \frac{1}{3} Ph$$

$$P = a^2$$

$$h = \frac{a}{2} \tan \alpha$$

$$V = \frac{1}{3} a^2 \frac{a}{2} \tan \alpha$$

$$V = \frac{a^3 \tan \alpha}{6}$$

$$\phi = P + M$$

$$P = a^2$$

$$M = 4 \frac{a}{2} w$$

$$M = 2 a w$$

$$M = \frac{a^2}{\cos \alpha}$$

$$\phi = a^2 + \frac{a^2}{\cos \alpha}$$

$$\phi = \frac{a^2 \cos \alpha + a^2}{\cos \alpha}$$

$$\phi = \frac{a^2}{\cos \alpha} (\cos \alpha + 1)$$

$$\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2}$$

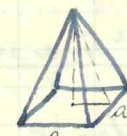
$$\frac{1 + \cos \alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\phi = \frac{a^2}{\cos \alpha} 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\phi = \frac{2 a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$$

$$\log \phi = \log 2 + 2 \log a + 2 \log \cos \frac{\alpha}{2} - \log \cos \alpha$$



10. II. 38.

Zadanie.

Podstawą ostrosłupa prostego jest kwadrat o boku a; kąt między bokami n wierzchołka ostrosłupa wynosi α. Obliczyć pole powierzchni i objętość tego ostrosłupa.

a, α

φ, V

$$V = \frac{1}{3} Ph$$

$$P = a^2$$

$$h = \frac{a}{2} \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} a^2 \frac{a}{2} \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$V = \frac{a^3}{6} \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$\phi = P + M$$

$$P = a^2$$

$$M = 4 \frac{a}{2} w$$

$$M = 2 a w$$

$$h = w \sin \alpha, w = \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$\phi = a^2 + 2 a w$$

$$\phi = a^2 + \frac{a^2 \tan \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}$$

$$\phi = \frac{a^2 \sin \alpha + a^2 \tan \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}$$

$$\phi = \frac{a^2 (\sin \alpha + \tan \frac{\alpha}{2})}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha + \tan \frac{\alpha}{2} = \left[\sin \alpha + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right]$$

$$= \frac{\sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$= \sin \alpha + \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha \tan \frac{\alpha}{2} + 1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{(\sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} + 1) \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} + 1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \alpha + (\sin^2 \alpha - 1)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$M = \frac{a^2 \tan \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}$$

$$M = \frac{a^2 \tan \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}$$

$$M = \frac{a^2 \tan \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}$$

$$M = \frac{a^2 \tan \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}$$

$$M = \frac{a^2 \tan \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}$$



W klavie.

1.) h, α
2.) φ, ψ

$$\varphi = \varphi_0 + M$$

$$\varphi = 4h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

$$M = 4 \frac{a}{2} W = 2aW$$

$$M = \frac{2ah}{\sin \alpha}$$

$$M = \frac{4h^2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\varphi = 4h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{4h^2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\varphi = 4h^2 \operatorname{ctg} \alpha \left(\operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \right)$$

$$\varphi = 4h^2 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$$

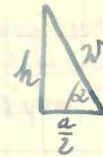
$$\varphi = 4h^2 \operatorname{ctg} \alpha \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha}$$

$$\varphi = \frac{8h^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\varphi = \frac{8h^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{4h^2 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= 4h^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

$$\psi = \frac{1}{3} \varphi h, \quad \varphi = 4h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$$



$$\frac{a}{2} = h \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

$$a = 2h \operatorname{ctg} \alpha$$

$$h = W \sin \alpha$$

$$W = \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$\psi = \frac{1}{3} h 4h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

$$\psi = \frac{4h^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{3}$$

1.) h, α
2.) φ, ψ

$$a = 2W \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$W^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$W^2 = h^2 + \frac{4W^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{4}$$

$$W^2 = h^2 + W^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$W^2 - W^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = h^2$$

$$W^2 (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}) = h^2$$

$$W^2 = \frac{h^2}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$W = \sqrt{\frac{h^2}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

$$W = h \sqrt{\frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

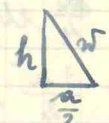
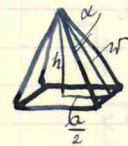
$$W = h \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{1}{\cos \alpha}}$$

$$a = 2h \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{1}{\cos \alpha}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$a = 2h \cos \frac{\alpha}{2} \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{\cos \alpha}}$$

$$a = 2h \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{1}{\cos \alpha}}$$

$$W = \frac{2h \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos \alpha}}$$



$$\frac{a}{2} = W \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$a = 2W \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$W^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} =$$

$$\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$W = h \sqrt{\frac{1}{\frac{\cos \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}}$$

$$W = h \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}}$$

$$W = h \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{1}{\cos \alpha}}$$

$$W = h \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{1}{\cos \alpha}}$$

$$W = \frac{h \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos \alpha}}$$

1.) a, α .

2.) ϕ .

$$\phi = \rho + M.$$

$$\rho = 6 \frac{a^2}{4} \sqrt{3}.$$

$$\rho = \frac{3a^2}{2} \sqrt{3}.$$

$$M = \frac{a^2}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\rho = \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$M = \frac{3a^2}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\phi = \frac{3a^2}{2} \sqrt{3} + \frac{3a^2}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\phi = \frac{3a^2}{2} (\sqrt{3} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}).$$

$$\phi = \frac{3a^2}{2} \frac{\sin(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ)}{\sin 30^\circ \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\phi = \frac{3a^2}{2} \frac{\sin(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ)}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

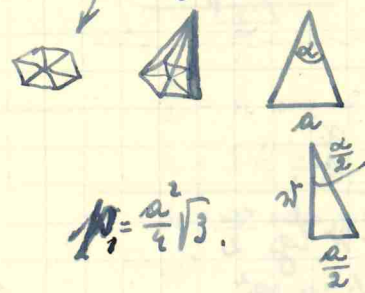
$$(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos 60^\circ = \sin \frac{\alpha}{2})$$

$$1 + 2 \sin \alpha =$$

$$= 2 \sin 30^\circ + 2 \sin \alpha =$$

$$= 2(\sin 30^\circ + \sin \alpha).$$

Podstawy naciobok.



$$\rho = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} &= \\ &= \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\cos 30^\circ \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin 30^\circ}{\sin 30^\circ \sin \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\sin(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ)}{\sin 30^\circ \sin \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

1.) $u = 10, s, \alpha$ (kąt nachylenia boku do podst.)

2.) $v = ?$

$$v = \frac{1}{3} \rho h.$$

$$\rho = \frac{u \rho^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{u}.$$

$$\rho = s \cos \alpha.$$

$$\rho = \frac{u s^2 \cos^2 \alpha}{2} \sin \frac{360^\circ}{u}.$$

$$\rho = \frac{u}{2} s^2 \cos^2 \alpha \sin \frac{360^\circ}{u}.$$

$$h = s \sin \alpha.$$

$$v = \frac{1}{3} \frac{u}{2} s^2 \cos^2 \alpha \sin \frac{360^\circ}{u} s \sin \alpha.$$

$$v = \frac{u}{6} s^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \sin \frac{360^\circ}{u}.$$

$$v = \frac{u s^3}{12} 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha \sin \frac{360^\circ}{u} \cos \alpha.$$

$$v = \frac{u s^3}{12} \sin 2\alpha \sin \frac{360^\circ}{u} \cos \alpha.$$

1.) n, a, v .

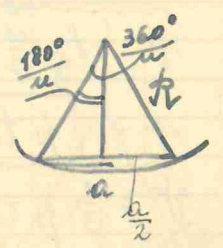
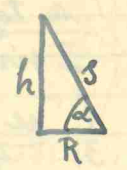
2.) $\alpha = ?$ (kąt nachylenia kraw. bocznej do podst.)

$$v = \frac{1}{3} \rho h.$$

$$\rho = \frac{u a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{u}.$$

$$h = \rho \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\frac{a}{2} = \rho \sin \frac{180^\circ}{u}.$$



$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{u}}$$

$$h = \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{2 \sin \frac{180^\circ}{u}}$$

$$V = \frac{1}{3} \frac{u a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{u} \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{2 \sin \frac{180^\circ}{u}}$$

$$V = \frac{u a^3}{24} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{u} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \frac{180^\circ}{u}}$$

$$V = \frac{u a^3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{u}}{24 \sin \frac{180^\circ}{u}}$$

Wklasic.

n.d. zadani ze trojka.

10. III. 38.

1.) p, α .

2.) $V = ?$

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$$

$$p = r h$$

$$r = h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$p = h^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$h = \sqrt{\frac{p}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}$$

$$r = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{p}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}$$

$$r = \sqrt{p \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$V = \frac{1}{3} p \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \pi \sqrt{\frac{p}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}$$



$$V = \frac{\pi}{3} p \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} p}$$

$$V = \frac{\pi p}{3} \sqrt{p \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$\log V = \log \pi + \log p + \frac{\log p + \log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2} - \log 3$$

1.) r, α, β
2.) φ, V

$$\phi = M + M_1$$

$$M = r \pi S$$

$$M_1 = r \pi S_1$$

$$\phi = r \pi S + r \pi S_1$$

$$\phi = r \pi (S + S_1)$$

$$\phi = r \pi \left(\frac{r}{\cos \alpha} + \frac{r}{\cos \beta} \right)$$

$$\phi = r^2 \pi \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta} \right)$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta} = \frac{\cos \beta + \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\phi = \frac{2 r^2 \pi \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \alpha \cos \beta}$$

I. $V = V_1 + V_2$

$$V_1 = \frac{1}{3} r^2 \pi h_1$$

$$V_2 = \frac{1}{3} r^2 \pi h_2$$

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi (h_1 + h_2)$$

$$V = \frac{r^2 \pi}{3} (r \operatorname{tg} \alpha + r \operatorname{tg} \beta)$$

$$V = \frac{r^3 \pi}{3} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)$$

$$V = \frac{r^3 \pi}{3} \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right)$$



$$r = S \cos \alpha$$

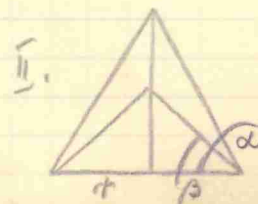
$$S = \frac{r}{\cos \alpha}$$

$$r = S_1 \cos \beta$$

$$S_1 = \frac{r}{\cos \beta}$$

$$h_1 = r \operatorname{tg} \alpha$$

$$h_2 = r \operatorname{tg} \beta$$



$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$V = \frac{r^3 \pi \sin(\alpha + \beta)}{3 \cos \alpha \cos \beta}$$

$$II. V = V_1 - V_2$$

$$V_1 = \frac{1}{3} r^3 \pi h_1$$

$$V_2 = \frac{1}{3} r^3 \pi h_2$$

$$V = \frac{1}{3} r^3 \pi (h_1 - h_2)$$

$$V = \frac{r^3 \pi}{3} (r \operatorname{tg} \alpha - r \operatorname{tg} \beta)$$

$$V = \frac{r^3 \pi}{3} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$V = \frac{r^3 \pi \sin(\alpha - \beta)}{3 \cos \alpha \cos \beta}$$

$$V = \frac{r^3 \pi \sin(\alpha - \beta)}{3 \cos \alpha \cos \beta}$$

$$\log V = 3 \log r + \log \pi + \log \sin(\alpha - \beta) - (\log 3 + \log \cos \alpha + \log \cos \beta)$$

Kadanie.

2. III. 37.

a.) $u = 8$. $s = 4.2 \text{ m}$. $\alpha = 41^\circ 47'$. (hát mizochy kras. bock. a vys.)

b.) $V = ?$

$$V = \frac{1}{3} \pi h$$

$$h = \frac{u^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{u}$$

$$r = s \sin \alpha$$

$$h = \frac{u s^2 \sin^2 \alpha \sin \frac{360^\circ}{u}}{2}$$

$$h = s \cos \alpha$$

$$V = \frac{1}{3} \frac{u s^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \sin \frac{360^\circ}{u}}{2}$$

$$V = \frac{u s^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \sin \frac{360^\circ}{u}}{6}$$

$$V = \frac{u s^3}{12} \sin 2\alpha \sin \alpha \sin \frac{360^\circ}{u}$$

$$\log V = \log u + 3 \log s + \log \sin 2\alpha + \log \sin \alpha + \log \sin \frac{360^\circ}{u} - \log 12$$

0.90309

1.86975

9.99726 -10

9.82368 -10

9.84949 -10

2.44327 -30

1.07918

$\log V = 1.36409$

$\log V = 1.36409$

0.62325.3

1.86975

41° 47'

41° 47'

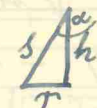
82° 94' = 83° 34'

360° : 8 = 45°

40

399 : 10 = 0.5

$$V = 23.125 \text{ m}^3$$



W klasie.

Stosiek.

Q. P, α

zn. V, r .

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$P = \pi r(s+r)$$

$$h = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

$$r = s \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$P = \pi r \left(\frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} + r \right)$$

$$P = \pi r \left(\frac{r + r \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)$$

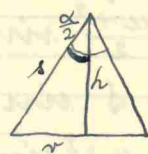
$$P = \frac{\pi^2 r}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$1 + \sin \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 2 \cos^2(45^\circ - \frac{\alpha}{4})$$

$$P = \frac{2 \pi^2 r \cos^2(45^\circ - \frac{\alpha}{4})}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$r^2 = \frac{P \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \pi \cos^2(45^\circ - \frac{\alpha}{4})}$$

$$r = \frac{1}{\cos(45^\circ - \frac{\alpha}{4})} \cdot \sqrt{\frac{P \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \pi}}$$



$$h = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\cos(45^\circ - \frac{\alpha}{4})} \cdot \sqrt{\frac{P \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \pi}}$$

$$h = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos(45^\circ - \frac{\alpha}{4})} \cdot \sqrt{\frac{P}{2 \pi \sin \frac{\alpha}{2}}}$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{P \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \pi \cos^2(45^\circ - \frac{\alpha}{4})} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos(45^\circ - \frac{\alpha}{4})} \cdot \sqrt{\frac{P}{2 \pi \sin \frac{\alpha}{2}}}$$

$$V = \frac{P \sin \frac{\alpha}{2}}{12 \cos^3(45^\circ - \frac{\alpha}{4})} \cdot \sqrt{\frac{P}{2 \pi \sin \frac{\alpha}{2}}}$$

Q. r, α

zn. V_s, V_k .

$$V_s = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V_k = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$h = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

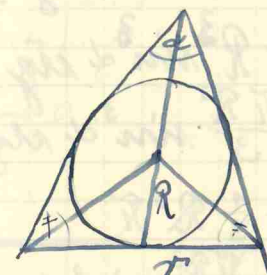
$$V_s = \frac{1}{3} \pi r^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

$$V_s = \frac{\pi^3 r}{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

$$V_k = \frac{4}{3} \pi \operatorname{tg}^3 \frac{\beta}{2} r$$

$$V_k = \frac{4 \pi^3 r}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\beta}{2}$$

$$\frac{V_s}{V_k} = \frac{\frac{\pi^3 r}{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\frac{4 \pi^3 r}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\beta}{2}} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{4 \operatorname{tg}^3 \frac{\beta}{2}}$$



$$45^\circ - \frac{\alpha}{4}$$

$$R = r \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

$$180^\circ - \alpha = \beta + \gamma$$

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$

$$\frac{\beta}{2} = \frac{180^\circ - (\alpha + \gamma)}{2}$$

Zadanie.

9. III. 38.

W kule o promieniu R wpisano stożek prosty, którego przekrój osiowy ma u wierzchołka kąt α . Wyznaczyć jest $\frac{V_K}{V_S}$.

1.) R, α .

2.) $V_K : V_S = ?$

$$V_K = \frac{4}{3} R^3 \pi$$

$$V_S = \frac{1}{3} r^2 \pi h$$

$$r = R \sin \alpha$$

$$h = R \sin \alpha \cotg \frac{\alpha}{2}$$

$$V_S = \frac{1}{3} R^3 \sin^3 \alpha \cotg \frac{\alpha}{2} \pi$$

$$V_S = \frac{\pi R^3}{3} \sin^3 \alpha \cotg \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{V_K}{V_S} = \frac{\frac{4}{3} R^3 \pi}{\frac{\pi R^3}{3} \sin^3 \alpha \cotg \frac{\alpha}{2}} = \frac{4}{\sin^3 \alpha \cotg \frac{\alpha}{2}}$$

← c.d.

W klasie.

Kula.

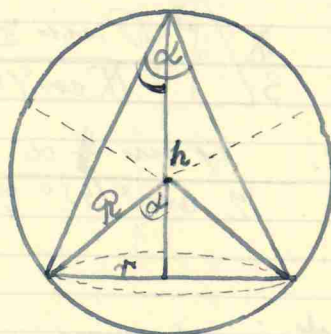
1.) $\alpha, (R)$.

2.) ℓ równoleżni.

$$\ell = 2r\pi$$

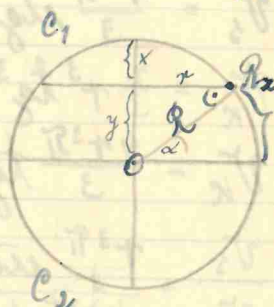
$$r = R \cos \alpha$$

$$\ell = 2\pi R \cos \alpha$$



$$r = R \sin \alpha$$

$$h = r \cotg \frac{\alpha}{2}$$



$$1.) \frac{c_1}{c_2} = \frac{2}{3}$$

$$C_1 : C_2 = 2 : 3$$

2.) α (szerokość geograf.)

$$C_1 = 2\pi R x$$

$$x = R - y$$

$$y = R \sin \alpha$$

$$x = R - R \sin \alpha$$

$$x = R(1 - \sin \alpha)$$

$$C_1 = 2\pi R^2 (1 - \sin \alpha)$$

$$C_2 = 2\pi R(R + y)$$

$$C_2 = 2\pi R(R + R \sin \alpha)$$

$$C_2 = 2\pi R^2 (1 + \sin \alpha)$$

$$2\pi R^2 (1 - \sin \alpha) : 2\pi R^2 (1 + \sin \alpha) = 2 : 3$$

$$(1 - \sin \alpha) : (1 + \sin \alpha) = 2 : 3$$

$$3(1 - \sin \alpha) = 2(1 + \sin \alpha)$$

$$3 - 3 \sin \alpha - 2(1 + \sin \alpha) = 0$$

$$3 - 3 \sin \alpha - 2 - 2 \sin \alpha = 0$$

$$-5 \sin \alpha + 1 = 0$$

$$5 \sin \alpha = 1$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{5}$$

Zadanie.

24. III. 38.

Obliczyć długość 1° równoleżnika ziemskiego.

1.) $\alpha = 50^\circ$.

2.) ℓ równoleżni.

$$\ell = 2r\pi$$

$$r = R \cos \alpha$$

$$\ell = 2\pi R \cos \alpha$$

$$\log \ell = \log 2 + \log \pi + \log R + \log \cos \alpha$$

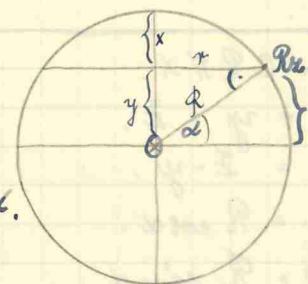
$$0.30103$$

$$0.49713$$

$$3.80464$$

$$9.80807$$

$$-10 \quad 14.41089 \quad -10$$



$$\log 0 = 14.41089 - 10.$$

$$\log 6 = 4.41089$$

$$\frac{78}{11.0} : 17 = 0.6$$

$$0 = 25756 \text{ km.}$$

$$1^\circ = 25756 : 360 = 71.544 \text{ km.}$$

$$\begin{array}{r} 556 \\ 1960 \\ 1600 \\ 1600 \end{array}$$

N'klavie.

$$1.) R, \alpha.$$

$$2.) \phi.$$

$$\phi = 2R\pi x.$$

$$\frac{x}{2} = R \sin \alpha.$$

$$x = 2R \sin \alpha.$$

$$\phi = 4R^2\pi \sin \alpha.$$

$$1.) R, \alpha.$$

$$2.) \phi.$$

$$\phi = 2R\pi x.$$

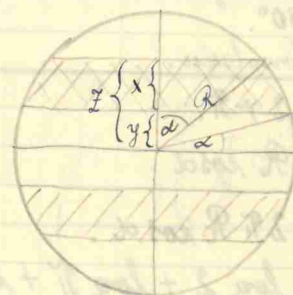
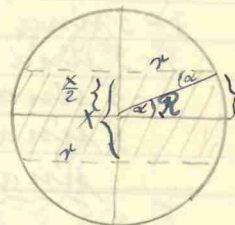
$$x + y = z.$$

$$x = z - y.$$

$$z = R \cos \alpha.$$

$$y = R \sin \alpha.$$

$$x = R \cos \alpha - R \sin \alpha.$$



$$x = R(\cos \alpha - \sin \alpha).$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) - \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \rightarrow$$

$$= 2 \cos 45^\circ \sin(45^\circ - \alpha).$$

$$x = R 2 \cos 45^\circ \sin(45^\circ - \alpha).$$

$$\phi = 4R^2\pi \cos 45^\circ \sin(45^\circ - \alpha).$$

$$1.) R, \alpha.$$

$$2.) C.$$

$$C = 2R\pi x.$$

$$x = R - z.$$

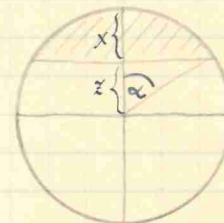
$$z = R \cos \alpha.$$

$$x = R - R \cos \alpha.$$

$$x = R(1 - \cos \alpha).$$

$$x = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} R.$$

$$C = 4R^2\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$



57 rad.
1.) 2 rovnoležní
2.) rovn. dlouh.

Gontórka.

liczby naturalne.

zestawienie wszystkich tworzenie oraz to nowych
liczby jednostek tego samego rodzaju i mierzanie
ich.

liczba naturalna jest to zbiór jednostek tego samego
rodzaju.

1, 14, 23 są to liczby nieumianowane
albo odmierane.

10, 20, 40 mianów - liczby umianowane.

1, 25, 37 - liczby nieogórnione lub nieogórnione.

1, 2, 3 - liczby ogólne.

porównywanie liczb.

Liczby są równe jeżeli obie zawierają jednakową ilość
jednostek.

Zasada trichotomii: z dwóch liczb porównywa-
nych mogą wynikać trzy wypadki: $a = b$, $a > b$, $a < b$.

Zasada tożsamości: każda liczba równa jest sobie
 $a = a$ samej.

Zasada symetrii: $b = a$ to $a = b$.

" przechodniości: $a = b$ i $b = c$, $a = c$.

ciąg liczb naturalnych.

ciąg liczb nat. (zaczynających się od 1), uporządko-

wanych co do wielkości, nazywamy niezgiętem liczb matematycznych.

Przemiennie, wyrażenia i równania.

Wyrażenie algebraiczne jest to wynik działania liczbami ogólnymi działaniami.

Równanie nazywamy (dwie wielkości) dwa różne wyrażenia połączone znakiem równości.

Dodawanie.

Dodać do siebie dwie liczby, znaczy dołożyć do pierwszej tyle jednostek ile zawiera druga.

$$a + b = c$$

składniki, suma. (składniki - dodajniki).

1. Prawo przemienności $a + b = b + a$.

2. " łączności $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$.

Zależność sumy od wartości składników.

1. Suma jest większa od każdego z składników.

2. Równe liczby dodane do równych, dają równe wyniki.

3. Wartość sumy zmienia się wprost jak zmienia się wartość jednego z składników.

Odejmowanie.

Odejmując od jednej liczby drugą, znaczy zmniejszyć taką liczbę, która dodana do drugiej da na wynik 1-ty.

$$a - b = c$$

odejmowana, odjemnik, różnica.

Dodawanie i odejmowanie są działaniami odwrotnymi i przeciwnymi.

Zero i liczby względne.

Różnicę dwóch równych liczb nazywamy zerem.

Zero dodane do jakiegokolwiek liczby lub odejmione - daje na wynik ją samą.

Liczba względna jest to liczba opatrzona znakiem.

$$+ 4 \quad (\text{znak i wartość bezwzględna}).$$

-3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5

Liczy względne stosuje się do wyrażania zmian wielkości, albo samych wielkości.

Liczy względne przedstawiamy za pomocą odcinków liczbowych czyli wektorów.

Z dwóch liczb względnych ta jest większa, której odpowiada punkt na osi liczbowej wyznaczony na prawo.

Liczy względne dodajemy, pisząc je obok siebie z ich znakami (suma algebraiczna), a następnie redukując.

Liczy względne odejmujemy, pisząc obok ujemniejszej odjemnej odjemnik ze znakiem przeciwnym (suma algebraiczna), a następnie redukując.

$$+3 - (-8) = +3 + 8 = 11.$$

Odejmowanie liczby względnej może być zastąpione dodaniem liczby przeciwnej.

$$(+4) - (-9) = (+4) + (+9) = 13.$$

Redukowanie jest to wykonywanie dodawania liczb względnych.

Liczy względne mnożymy, mnożąc ich wartości bezwzględne, a wyniki dajemy znak + jeżeli oba czynniki mają znaki równe, a - jeżeli czynniki mają znaki różne.

$$-a \cdot +b = -ab.$$

$$-a \cdot -b = +ab.$$

$$+a \cdot +b = +ab.$$

Liczy względne dzielimy, dzieląc ich wartości bezwzględne, a wyniki dajemy znak + gdy czynniki mają znaki równe, a - gdy czynniki mają znaki różne.

Jednomian jest to iloczyn liczb niezgodnych i potęg liczb głównych.

$$-4 a^4 b^5$$

Współczynnik, liczba główna.

Jednomiany mające zupełnie takie same litery główne nazywają się podobnymi.

Jednomiany podobne redukują się, redukując ich współczynniki, a litery główne zostawiając niezmienionymi.

$$-3xy^2 + 7xy^2 - 13xy^2 = -9xy^2$$

Jednomiany dodajemy kładąc je obok siebie z ich znakami, a następnie redukując.

$$-3a^2 + 4a^2 = a^2$$

Jednomiany odejmujemy kładąc obok siebie z przeciwnymi znakami, a następnie redukując.

$$-8b^2 - (+9b^2) = -8b^2 - 9b^2 = -17b^2$$

Jednomiany mnożymy, mnożąc iloczyn ich współczynników przez iloczyn ich liter głównych.

$$-3a^2 \cdot +18b^2 = -54a^2b^2$$

Jednomiany dzielimy, mnożąc iloraz ich współczynników przez iloraz liter głównych.

$$-42a^3b^2 : -7a = +6a^2b^2$$

Jednomiany potęgujemy, potęgując współczynniki i literę główną, a otrzymane potęgi mnożąc.

$$(-4ab^2)^3 = -4^3a^3b^6$$

Wielomian jest to suma algebraiczna jednomianów.

$$-5a + 8bc - 14x$$

Jednomiany wchodzące w skład wielomianu nazywają się jego składnikami (wyrazami).

Wielomiany dodajemy pisząc ich składniki obok siebie z uwzględnieniem znakami, a w wyniku redukując jednomiany podobne.

$$(-4a + b - 14c) + (18a^2 - 14a) = -4a + b - 14c + 18a^2 - 14a = 18a^2 - 18a + b - 14c$$

Wielomiany odejmujemy pisząc obok siebie z przeciwnymi znakami, a w wyniku redukując jednomiany podobne.

$$(15x^3 + 3y - z) - (14x^2 - 5y - 8z) = 15x^3 + 3y - z - 14x^2 + 5y + 8z = 15x^3 - 14x^2 + 8y + 7z$$

Wielomiany mnożymy przez wielomian mnożąc każdy składnik wielomianu mnożnika, każdy składnik mnożonej i redukując jednomiany podobne.

$$(4x - 3y^2)(15x^3 + y - 2x^2) = 60x^4 - 45x^2y^2 + 4xy - 3y^3 -$$

$$-8x^3 + 6x^2y^2 = \text{ itd. }$$

Wielomian dzielimy przez wielomian porządkując najpierw oba wielomiany rosnąco lub malejąco według potęg, lub tej samej zasady; dzielimy najwyższy składnik dzielnej przez najwyższy składnik dzielnika. Otrzymanym tak najwyższym składnikiem ilorazu mnożymy dzielnik a iloczyn ten odejmujemy od dzielnej. Dzielimy najwyższy składnik reszty przez najwyższy składnik dzielnika znajdujemy następnie najwyższy składnik ilorazu. Składnikiem tym mnożymy cały dzielnik, a otrzymaną iloczyn odejmujemy od reszty; tak postępując z nową resztą i używając w podobny sposób jak z pierwszą, wyznaczamy kolejno wszystkie składniki ilorazu.

$$\begin{array}{r} a^5 + 5a^3b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 : a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \underline{a^5 + 3a^3b + 3a^3b^2 + a^2b^3} \\ 2a^3b + 7a^3b^2 + 9a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\ \underline{- a^3b^2 + 3a^2b^3 + 3ab^4 + b^5} \\ 2a^3b + 6a^3b^2 + 6a^2b^3 + 2ab^4 \\ \underline{- 2a^3b + 6a^3b^2 + 6a^2b^3 + 2ab^4} \\ 0 \end{array} = a^2 + b^2 + 2ab$$

Rozkładanie wielomianów na czynniki.

1) Jeżeli wszystkie składniki wielomianu są podzielne przez jakiś jednomian to wówczas dzielimy ten wielomian przez dany jednomian, uznając jednocześnie przed lub za nawiasem umieszczenie przez ten sam jednomian. Takie postępowanie nazywa się wyłączeniem przed nawias wspólnego czynnika.

$$a^3b - a^2b^2 + ab^3 = ab(a^2 - ab + b^2)$$

2) Jeżeli dany wielomian jest rozwiniętą potęgą innego wielomianu, wówczas zastępujemy go potęgą tego wielom.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \text{ to } = (a+b)(a+b)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$

3) Jeżeli dany wielomian jest sumą lub różnicą jednakowych potęg dwóch jednomianów lub wielomianów, otrzymujemy następujące rozkłady:

a) Różnica jednakowych potęg dwóch liczb jest podzielna

przez różnicę tych liczb.
np.1. $a^2 - b^2 : a - b = a + b$
czyli $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

np.2. $a^3 - b^3 : a - b = a^2 + ab + b^2$

$$\begin{array}{r} a^3 - b^3 : a - b \\ \underline{-a^3} \quad + a^2b \\ -b^3 + a^2b \\ \underline{+b^3} \quad + b^2a \\ a^2b - b^2a \\ \underline{-a^2b + b^2a} \end{array}$$

czyli $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

b) Suma jednakowych potęg dwu liczb nie jest podzielna przez różnicę tych liczb.

c) Różnica jednakowych a parzystych potęg dwu liczb jest podzielna przez sumę tych liczb.
Różnica jednakowych a nieparzystych potęg dwu liczb nie jest podzielna przez sumę tych liczb.

np.3. $a^3 - b^3 : a - b = a^2 + ab + b^2$

czyli $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

np.4. $a^4 - b^4 : a + b = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$

$$\begin{array}{r} a^4 - b^4 : a + b \\ \underline{-a^4} \quad + a^3b \\ -b^4 - a^3b \\ \underline{+a^3b} \quad - a^2b^2 \\ -b^4 + a^2b^2 \\ \underline{+b^4} \quad - ab^3 \\ -b^4 + ab^3 \\ \underline{+b^4} \end{array}$$

czyli $(a^4 - b^4) = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$.

Suma jednakowych a nieparzystych potęg dwu liczb jest podzielna przez sumę tych liczb.
Suma jednakowych a parzystych potęg dwu liczb nie jest podzielna przez sumę tych liczb.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 : a + b = a^2 - ab + b^2$$

Równaniach w ogólności.

Równaniem nazywamy połączenie dwu funkcji jednej lub wielu zmiennych za pomocą znaku równości.

Równanie warunkowe (w przeciwieństwie do tożsamościowego równania) jest to takie równanie, którego funkcje są różne i tylko dla pewnych podstawień mogą otrzymać jednakowe wartości.

Przekształcanie równań.

1.) Równanie się nie zmienia, jeżeli do obydwu jego stron dodamy (lub odejmiemy) tę samą liczbę lub tę samą funkcję.

2.) Równanie się nie zmienia jeżeli do obydwu jego stron pomnożymy (lub podzielimy) przez tę samą liczbę. Z tych twierdzeń wynika, że:

a) Każdy wyraz równania oprócz znaku może być przemieniony z jednej strony na drugą, lecz ze zmianą znaku;

b) Znaki wszystkich wyrazów możemy zmienić na przeciwny.

c) Równanie, którego obie strony mają wspólny czynnik stały, ułamkowy lub niewiadomą można skrócić (uproszczyć) przez tenże czynnik.

d) Równanie można uwolnić od ułamków, mnożąc obie strony przez N. N. N. wszystkich mianowników.

Porządkowanie równania:

1. Uwalniany równ. od ułamków.
2. Wykonujemy działania matematyczne (uwaln. od ułam.)
3. Sprowadzamy równ. do zera (wszystkie wyrazy przenosimy na lewą stronę równ.).
4. Wyrazy niewiadome porządkujemy według potęg malejących, łącząc ze sobą wyrazy równomienne, a na wiadomych wykonujemy wskazane działania.
5. Jeżeli wszystkie wyrazy równania mają wspólny czynnik, wtedy równanie skracamy o ten czynnik.

Równanie stopnia pierwszego o jednej niewiad.

Każde równanie st. I. o jedn. niewiad. można przez uporządkowanie sprowadzić do najprostszej postaci:

$$ax + b = 0.$$

Aby je rozwiązać, przenosimy wiadomą na prawą stronę równ., a następn. dzielimy obie strony przez współczynnik niewiadomej:

$$x = \frac{b}{a}.$$

Układ obu równań stopnia pierwsz. o 2 niewiad.

$$a_1x + b_1y = c_1.$$

$$a_2x + b_2y = c_2.$$

- 1) Metoda podstawiania polega na tym: z pierwszego równania wyliczamy x lub y i wartość daną podstawiamy do równ. drugiego; przez to otrzymujemy jedno równ. o jednej niewiadomej.
- 2) Metoda porównania polega na tym, że z obu równań obliczamy te same niewiadome i te wartości ze sobą porównujemy.
- 3) Metoda równych współczynników polega na tym, że oba równania w ten sposób przekształcamy, ażeby przy jednej niewiadomej w obu równaniach były współczynniki

co do wartości bezwzględnej sobie równe (znaki mogą być takie same, lub różne). Jeżeli znaki są te same, to równania stronami od siebie odejmujemy, jeżeli różne - to równania do siebie stronami dodajemy.

Funkcje.

Jeżeli jakaś wielkość może przybierać różne wartości, to mówimy, że jest zmienną; i w precyzyjnym razie jest stałą. Jedną wielkość od drugiej wielkości zależy - to znaczy, że gdy się druga wielkość zmienia, to się i pierwsza zmienia.

Funkcja jest to zależność pomiędzy dwoma wielkościami.

$$y = f(x) \text{ i } y \text{ jest funkcją } x.$$

Proporcjonalność.

Dwie wielkości są wtedy do siebie wprost proporcjonalne jeżeli: gdy się jedna z nich coś do wart. bezwzględnej, w razy zwiększy (lub zmniejszy) to się i druga coś do wart. bezwzgl. w razy zwiększy (lub zmniejszy).

Wzór na proporcjonalność prosta:

$$y = ax.$$

y - zmienna zależna.

x - " niezależna.

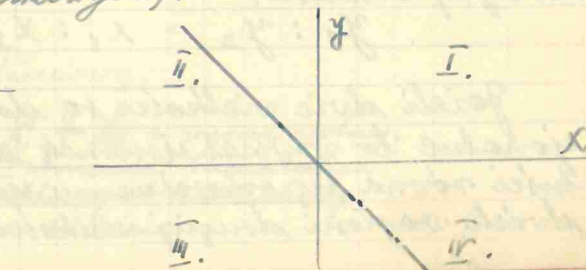
a - współczynnik proporcjonalności.

Kierunek prostej zależy od a (i on nazywa się współczynnikiem kierunkowym).

Np. 1.

$$y = -1x.$$

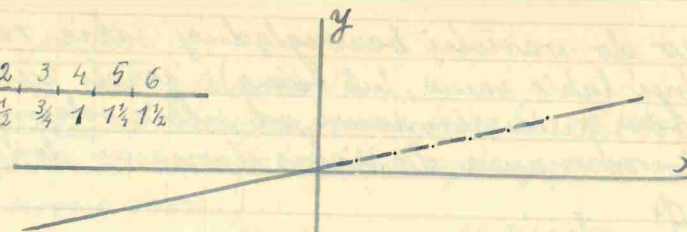
x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3



Np. 2.

$$y = \frac{1}{4}x.$$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$



Proporcjonalność odwrotna zachodzi wtedy, jeżeli:
gdy się jedna z wielkości co do wartości bezwzględ. u razy zwiększy (zmniejszy), to się druga co do wartości bezwzględ. u razy zmniejszy (zwiększy).

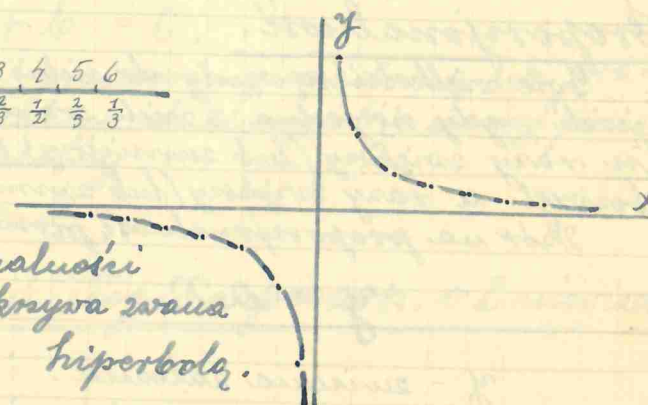
Wzór na proporcję odwrotną:

$$y = \frac{a}{x}.$$

Np. 3.

$$y = \frac{2}{x}.$$

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	2	3	4	5	6
y	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$



Narysować proporcjonalności odwrotnej jest linia krzywa zwana hiperbolą.

Jeżeli dwie wielkości są do siebie wprost proporcjonalne, to wówczas stosunek jakiegokolwiek dwóch wartości jednej wielkości jest równy stosunkowi odpowiednich dwóch wartości drugiej wielkości.

$$y_1 : y_2 = x_1 : x_2$$

Jeżeli dwie wielkości są do siebie odwrotnie proporcjonalne to wówczas stosunek dwóch wartości jednej wielkości równa się odwrotnemu stosunkowi odpowiednich dwóch wartości drugiej wielkości.

$$y_1 : y_2 = x_2 : x_1.$$

Reguła trzech prostych.

Zadanie z reguły trzech prostych jest to każde zadanie, w którym występują dwie wielkości do siebie wprost albo odwrotnie proporcjonalne.

Zadanie takie rozwiązujemy za pomocą: 1) wzoru, 2) proporcji, 3) wnioskowania.

Np.: Któs' wręcił za 4 godz. 16 km drogi; jak daleko zajdzie za 20 godzin?

1) Za pomocą wzoru:

$$y = ax.$$

$$16 = a \cdot 4.$$

$$a = 4.$$

$$y = ax.$$

$$y = 4 \cdot 20$$

$$y = 80.$$

2) Proporcja: (prawo: proporcja się nie zmienia, jeżeli jeden wyraz skrajny i jeden środkowy podzielimy lub pomnożymy przez tę samą liczbę).

$$x : 16 = 20 : 4$$

$$x : 4 = 20 : 1$$

$$x = 80.$$

3) Wnioskowanie:

$$4 \text{ godz.} - 16 \text{ km.}$$

$$20 \text{ " } - \text{ ? }$$

$$4 \text{ godz.} - 16 \text{ km}$$

$$1 \text{ " } - 4 \text{ "}$$

$$20 \text{ " } - 80 \text{ "}$$

Funkcja liniowa.

Wzór na funkcję liniową:

$$y = ax + b \rightarrow \text{wyraz wolny.}$$

↓ zmiana niezależna

↓ współczynnik kierunkowy.

↓ zmiana zależna.

Od współczynnika a zależy kierunek prostej a i uchylenie.

- 1) gdy $a = 0$ prosta jest do osi x równoległa;
- 2) gdy $a > 0$ (dodatnie) prosta jest odchylona od dodatniego kierunku osi x w górę;
- 3) gdy $a < 0$ (ujemne) prosta jest odchylona od dodatniego kierunku osi x w dół.

Odchylenie jest tym większe, im a co do wartości bezwzględnej jest większe.

Wyraz b oznacza odcinek jaki prosta odcina na osi y .

Przez miejsce zerowe funkcji rozumiemy taką wartość na zmiennej niezależnej x , dla której funkcja y przyjmuje wartość zera.

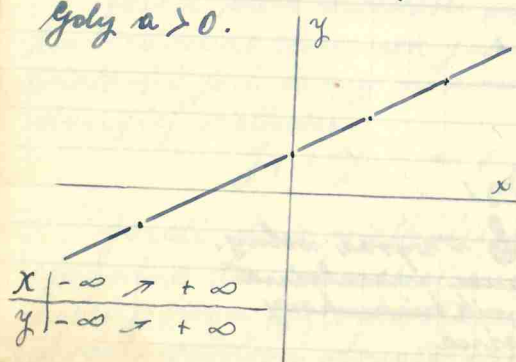
Gdy funkcję przyrównamy do zera, otrzymamy równanie, którego pierwiastek jest zarazem miejscem zerowym funkcji.

Rozwiązywanie równań rysunkiem.

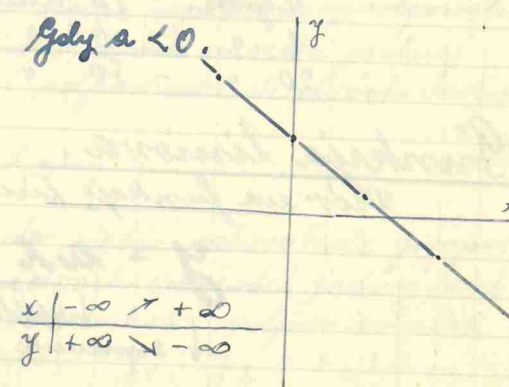
Monotoniczność funkcji liniowej.

Zbadać monotoniczność funkcji znaczy to zbadać, jak się zmienia funkcja, gdy zmienia niezależna x rośnie od $-\infty$ do $+\infty$.

Gdy $a > 0$.



Gdy $a < 0$.



Sposób zmiennych przy funkcji liniowej:

Równym przyrostom zmiennej niezależnej x odpowiadają równe przyrosty (ubytki) funkcji y .

Funkcja liniowa zmienia się jednostajnie.

Monotoniczność jest to dwa wyrażenia połączone znakiem monotoniczności.

Monotoniczności dzielą się według stopnia i według ilości nieciągłości nazywanych zmiennymi.

Rozwiązywanie monotoniczności:

- 1) Wyznaczenie od wartości.
- 2) Wyznaczenie od ułamków (roźni się tym od wyznaczenia równań, że gdy w mianowniku jest zmienna monotoniczności nie można wyodrębnić od ułamków, lecz musimy brać i licznik i mianownik raz większy, a raz mniejszy od zera dla zbadania, przy jakich wartościach na x (zmiennej) monotoniczność jest większa od zera, przy jakich mniejsza).
- 3) Przekształcenie.
- 4) Redukowanie.

Dyskusja równań stop. pierwsz. o jednej niewiadomej.

I. Rozwiązuje się gdy $a = 0$.

1. sprzeczne gdy $b \neq 0$ ($0 \cdot x + b = 0$ - pierwiastka nie ma)
2. niesprzeczne gdy $b = 0$ i $a = 0$. ($0 \cdot x + 0 = 0$).

II. Rozwiązuje się gdy $a \neq 0$.

Jeżeli w równaniu występuje parametr zmienny, to równanie takie wymaga dyskusji.

Przeprowadzić dyskusję równania stop. pierwsz. o jedn. niewiad. znaczy to zbadać, dla jakich wartości parametru jest to równanie rozwiązywalne, czy nierozwiązywalne i czy wtedy jest sprzeczne, czy niesprzeczne; - następnie zbadać jak zmienia się znak pierwiastka w zależności od parametru.

№ 1. $\frac{mx+3}{2} = m-x$,
 $mx+3 = 2m-2x$,
 $mx+2x = 2m-3$,
 $mx+2x+3-2m = 0$,
 $x(m+2) + 3-2m = 0$,
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $a \quad b$

I. Równanie jest nierozwiązalne gdy $a = 0$.
 $m+2 = 0$.
 $m = -2$.

$$b = 3 - 2m.$$

$$b = 7.$$

$$b \neq 0.$$

Gdy $m = -2$ równanie jest nierozwiązalne i sprzeczne.

II. Równanie jest rozwiązalne gdy $a \neq 0$.

$$x(m+2) + 3 - 2m = 0.$$

$$x = \frac{2m-3}{m+2}.$$

$$\begin{array}{ll} L > 0 & \text{gdy } m > \frac{3}{2}, \quad M > 0 \text{ gdy } m > -2. \\ L = 0 & \text{" } m = \frac{3}{2}, \quad M = 0 \text{ " } m = -2. \\ L < 0 & \text{" } m < \frac{3}{2}, \quad M < 0 \text{ " } m < -2. \end{array}$$

Gdy $m < -2$ to $x > 0$.

" $m = -2$ " x nie istnieje.

" $m > -2$ " $x < 0$.

" $m < \frac{3}{2}$ " $x < 0$.

" $m = \frac{3}{2}$ " $x = 0$.

" $m > \frac{3}{2}$ " $x > 0$.

" $\frac{3}{2} > m > -2$ " $x < 0$.

Dyskusja układu dwóch równań II. pierwszego i drugiego uwarunkowania.

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \quad \cdot b_2$$

$$\begin{array}{l} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ -a_2b_1x + b_2b_1y = -c_2b_1 \end{array}$$

$$a_1b_2x - a_2b_1x = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$x(a_1b_2 - a_2b_1) = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

$$y =$$

I. Układ jest nierozwiązalny gdy:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0.$$

$$a_1b_2 = a_2b_1.$$

$$\left\{ \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \right\}$$

$$b_2c_1 - b_1c_2 \neq 0.$$

$$b_2c_1 + b_1c_2.$$

$$\frac{c_1}{c_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

$$a_1c_2 - a_2c_1 = 0.$$

$$a_2c_1 \neq a_1c_2.$$

$$\frac{c_1}{c_2} \neq \frac{a_1}{a_2}.$$

Układ jest nierozwiązalny, gdy stosunek współczynników przy x jest równy stosunkowi współczynników przy y , a uwarunkowanie jest on sprzeczny, gdy stosunek wyrazów wolnych nie jest równy temu samemu stosunkowi; uwarunkowanie, gdy stosunek wyrazów wolnych jest równy temu samemu stosunkowi.

Układ jest nierozwiązalny, gdy $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

II. Układ jest rozwiązalny, gdy stosunek współczynników przy x nie równa się stosunkowi współczynników przy y .

$$\begin{array}{l} mx + y = 1 \\ x + my = -1 \end{array} \cdot m$$

$$\begin{array}{l} mx + y = 1 \\ -mx + m^2y = -m \end{array}$$

$$y - m^2y = 1 + m$$

$$y(1 - m^2) = 1 + m$$

$$y = \frac{1+m}{1-m^2} \rightarrow y = \frac{1+m}{(1-m)(1+m)} = \frac{1}{1-m}$$

$$x = -1 - my$$

$$x = -1 - \frac{m(1+m)}{1-m^2}$$

$$x = -1 - \frac{m+m^2}{1-m^2}$$

$$\frac{m}{1} = \frac{1}{m}$$

$$m^2 = 1$$

$$m = \pm 1$$

$$y = \frac{1}{1-m}$$

$$x = -1 - my$$

$$x = -1 - \frac{m}{1-m}$$

$$x = \frac{-1+m-m}{1-m}$$

$$x = \frac{-1}{1-m}$$

I. Układ rozr., gdy $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

II. " nierozr., " $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

1.) sprzeczny, gdy $\frac{a_1}{a_2}$ lub $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

2.) nierozr., " $\frac{a_1}{a_2}$ lub $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Przykłady:

1.) $x + y = 3$

$2x + 2y = 4$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}, \text{ czyli } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \rightarrow \text{układ nierozr.}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{c_1}{c_2} \neq \frac{a_1}{a_2} \rightarrow \text{układ sprzeczny.}$$

$$\begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 4 \end{array} \cdot 2$$

$$\begin{array}{l} 2x + 2y = 6 \\ -2x + 2y = -4 \end{array}$$

$$0 = 2 \rightarrow \text{sprzeczność.}$$

$$\begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 4 \end{array}$$

$$y = 3 - x$$

$$2y = 4 - 2x$$

$$y = 2 - x$$

2.) $x - \frac{1}{2}y = 4$

$$2x - y = 8$$

$$2x - y = 8$$

$$2x - y = -8$$

$$0 = 0$$

$$0x - 0 = 0$$

Nieskończ. ilość pierw.

$$2x - y = 8$$

$$2x - y = 8$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{b_1}{b_2} = 1$$

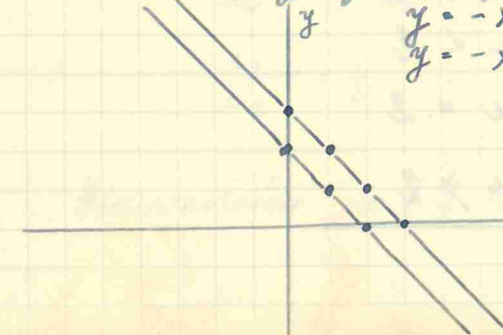
$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{8}{8} = 1$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2} \rightarrow \text{ukł. nierozr.}$$

$$2x = y + 8$$

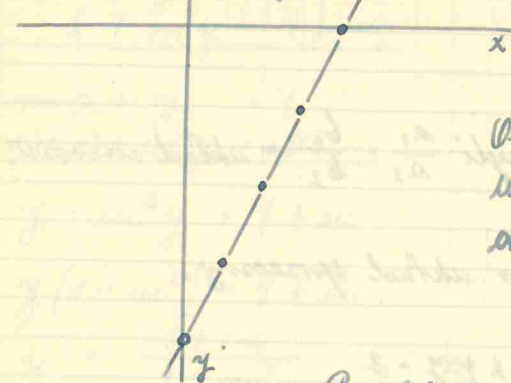
$$y = 2x - 8$$

Rozwiązanie graficzne przykładu 1.



Obrazem geometrycznym układu sprzecznego są dwie proste do siebie równoległe.

Rozw. graf. przykł. 2.



$$y = 2x - 8$$

$$y = 2x - 8$$

Obrascu geometryczny
ukladu nieliniowego to
dwie proste nakrywajace sie.

Przyklad na dyktando 3.

$$mx + y = -3$$

$$2x + y = 5$$

$$x(2-m) = 2$$

$$x = \frac{2}{2-m}$$

$$y = 5 - 2x$$

$$y = 5 - \frac{4}{2-m}$$

$$y = \frac{10 - 5m - 4}{2-m}$$

$$y = \frac{6 - 5m}{2-m}$$

I. Układ jest nierozwiązalny, gdy $m = 2$.

$$\frac{m}{2} = \frac{1}{1}$$

$$m = 2, \text{ wtedy } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{5} \text{ czyli } \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \rightarrow \text{ukł. sprzeczny.}$$

II. Układ jest rozwiązalny, gdy $m \neq 2$.

$$m > 0 \text{ gdy } m < 2$$

$$m = 0 \text{ " } m = 2$$

$$m < 0 \text{ " } m > 2$$

$$L > 0 \text{ gdy } m < \frac{6}{5}$$

$$L = 0 \text{ " } m = \frac{6}{5}$$

$$L < 0 \text{ " } m > \frac{6}{5}$$

$$\text{Gdy } m > 2 \text{ to } x < 0$$

$$\text{" } m = 2 \text{ " } x \text{ n.e.}$$

$$\text{" } m < 2 \text{ " } x > 0$$

$$\text{Gdy } m < \frac{6}{5} \text{ to } y > 0 \quad x > 0$$

$$\text{" } m = \frac{6}{5} \text{ " } y = 0 \quad x > 0$$

$$\text{" } \frac{6}{5} < m < 2 \text{ to } y < 0 \quad x > 0$$

$$\text{" } m = 2 \text{ to } y \text{ n.e. } x \text{ n.e.}$$

$$\text{" } m > 2 \text{ " } y > 0 \quad x < 0$$

Przyklad na dyktando 4.

$$mx + y = m - 2$$

$$3x - y = 2$$

$$x(3+m) = m$$

$$x = \frac{m}{3+m}$$

$$-y = 2 - 3x$$

$$-y = 2 - \frac{3m}{3+m}$$

$$-y = \frac{6 + 2m - 3m}{3+m}$$

$$-y = \frac{6 - m}{3+m}$$

$$y = \frac{m - 6}{3+m}$$

Równanie jest ^{nie}rozwiąz., gdy $m = 3$.

$$\frac{m}{3} = \frac{1}{1}$$

$$m = 3 \text{ bo } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{2} \text{ ; } \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \text{ dlatego równanie jest sprzeczne.}$$

Dla wartości $m \neq 3$ równanie jest rozwiązalne.

$$mx + y = 1.$$

$$x + my = -1.$$

$$\text{I. } \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}.$$

$$\frac{m}{1} = \frac{1}{m}.$$

$$\frac{m}{1} - \frac{1}{m} = 0.$$

$$\frac{m^2 - 1}{m} = 0.$$

$$\frac{m^2 - 1}{m} = 0.$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2}$$

$$m^2 - 1 = 0.$$

$$m^2 = 1.$$

$$m = \pm 1.$$

(układ jest niestwierd.)

dl. $m = -1.$

$$\frac{c_1}{c_1} = -1.$$

$$\frac{a}{a_1} = -1.$$

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{a}{a_1} \text{ - układ niestwierd.}$$

dl. $m = 1.$

$$\frac{c_1}{c_1} = -1.$$

$$\frac{a}{a_1} = 1.$$

$$\frac{c_1}{c_1} \neq \frac{a}{a_1} \text{ - układ sprzeczny.}$$

Integracja

$$\text{I. } (ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

$$\text{II. } a^n \cdot a^p = a^{n+p}$$

$$\text{III. } (a^n)^p = a^{np}$$

$$\text{IV. } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\text{V. } a^n : a^p = a^{n-p}$$

$$2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 2^x \cdot 2 + 2^x + (2^x : 2) = 2^x \cdot 2 + 2^x + \frac{2^x}{2} = \frac{4 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x + 2^x}{2} = \frac{7 \cdot 2^x}{2}$$

$$= 7(2^x : 2) = 7 \cdot 2^{x-1}$$

Pierwiastkowanie

$$81^n - 2 \cdot 9^{2n} + 5 \cdot 3^{4n} = 81^n - 2 \cdot (9^2)^n + 5 \cdot (3^4)^n = 81^n - 2 \cdot 81^n + 5 \cdot 81^n = 4 \cdot 81^n$$

$$\text{I. } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\text{II. } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\text{III. } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\text{IV. } \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\text{V. } \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a^{\frac{m}{m}}}$$

Równanie stopnia 2. o jednej niewiadomej (równanie kwadratowe).

$$\text{Postać: } ax^2 + bx + c = 0.$$

$$\text{Równ. niestwierd. gdy } b=0 \text{ ; } c=0 \text{ ; } b \text{ i } c = 0.$$

Wzór na pierwiastek równ.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

$$ax^2 + c = 0.$$

$$1) \Delta = 0; \quad x_2 = x_1.$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

2) $\Delta < 0$; x_1, x_2 nie istnieją. Funkcja nie da się rozłożyć.

W przypadku funkcji kwadratowej:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

$$\Delta > 0; \quad x_1 < x_2$$

$$y = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Gdy $x < x_1$, to y ma znak zgodny ze znakiem współcz. a.

Gdy $x > x_2$, " " " " " " " a.

Gdy $x_1 < x < x_2$, " " " " " " " przeciwny do znaku a.

Gdy funkcja ma 2 miejsca zerowe, to przyjmuje znak zgodny ze znakiem współczynnika a dla wartości na zewnątrz, mniejszych od mniejszego, albo większych od większego miejsca zerowego, a znak przeciwny do znaku współczynnika a dla wartości zawartych między miejscami zerowymi.

$$\Delta = 0; \quad x_1 = x_2.$$

$$y = a(x - x_1)^2.$$

Gdy $x < x_1$, to y ma znak zgodny ze znakiem współcz. a.

Gdy $x > x_1$, " " " " " " " a.

Gdy funkcja ma jedno miejsce zerowe, to przyjmuje znak zgodny ze znakiem współczynnika a dla wartości od tego miejsca zerowego mniejszych albo większych, a znak przeciwny do znaku współcz. a przyjmuje nie [może].

$$\Delta < 0; \quad x_1, x_2 \text{ nie istnieją.}$$

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$\left| + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right|$$

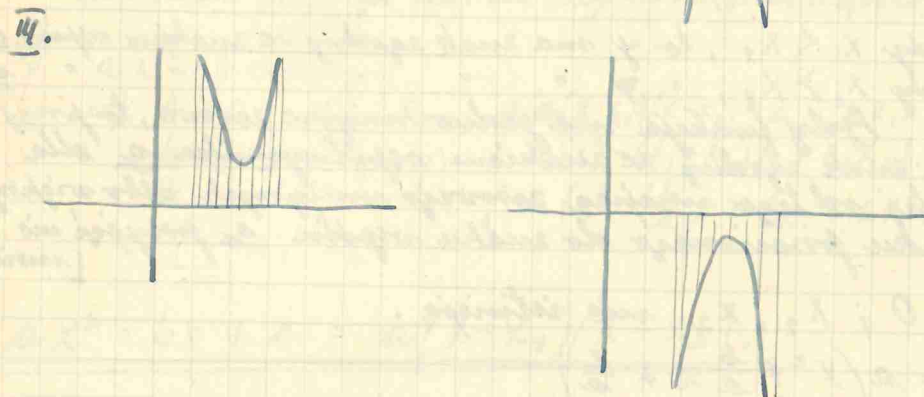
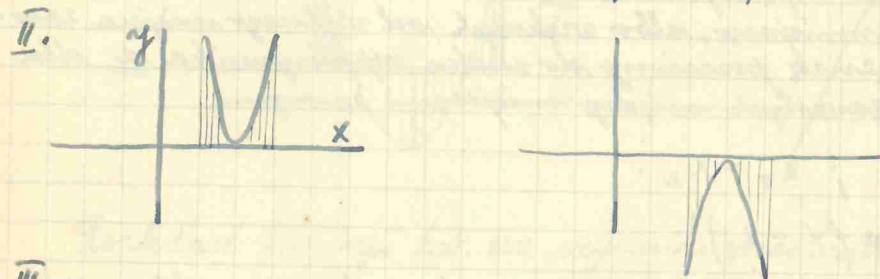
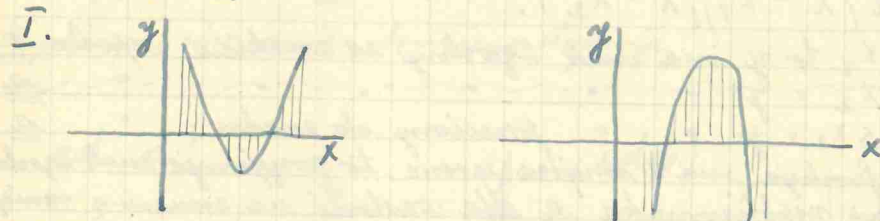
$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right).$$

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right].$$

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]. \leftarrow \text{Postać kanoniczna funkcji kwadratowej.}$$

Dla wszelkich wartości na x funkcja przyjmuje znak zgodny ze znakiem współczynnika a , a znaku przeciw: nego przyjąć nie może.



Dyskusja równań stop. drugiego.

29. III. 38.

Przeprowadzić dyskusję równania kwadratowego znaczy to zbadać, jak zmienia się ilość pierwiastków i ich znaki w zależności od parametrów.

$$x^2 - (3m-1)x + m^2 = 0.$$

$$\Delta = 5m^2 - 6m + 1.$$

$$x = \frac{(3m-1) \pm \sqrt{9m^2 - 6m + 1 - 4m^2}}{2}.$$

$$x = \frac{(3m-1) \pm \sqrt{5m^2 - 6m + 1}}{2}.$$

I. $\Delta < 0$ równ. nie ma pierw. ; $\frac{1}{5} < m < 1$.

$$5m^2 - 6m + 1 < 0.$$

$$m = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{10}$$

$$m = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{10}$$

$$m = \frac{6 \pm 4}{10}$$

$$m_1 = \frac{1}{5}.$$

$$m_2 = 1.$$

II. $\Delta = 0$ równ. ma 1 pierw. ;

$$m = \frac{1}{5}, \text{ albo } m = 1.$$

$$\frac{b}{a} = -\frac{(3m-1)}{1} = -\left(\frac{3}{5} - 1\right) = \frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} > 0. \quad \square$$

$$\frac{b}{a} = -3 + 1 = -2 < 0. \quad \square$$

$$\text{Dla } m = \frac{1}{5} - x_1 = x_2 < 0.$$

$$\text{Dla } m = 1 - x_1 = x_2 > 0.$$

III. $\Delta > 0$ równ. ma 2 pierśw.;

$$m < \frac{1}{5}, \text{ albo } m > 1.$$

znaki są jednak. gdy $\frac{c}{a} > 0$.

$$\frac{m^2}{1} > 0$$

$m > 0$, albo $m < 0$.

$$0 < m < \frac{1}{5}, \text{ albo } m > 1, \text{ albo } m < 0,$$

$m < 0$ a > 1 - nie możliwe.

Oba znaki ujemne:

$$\frac{b}{a} > 0.$$

$$\frac{b}{a} = 1 - 3m > 0.$$

$$3m < 1.$$

$$m < \frac{1}{3}.$$

znaki dodat.:

$$\frac{b}{a} < 0.$$

$$\frac{b}{a} = 1 - 3m < 0.$$

$$3m > 1.$$

$$m > \frac{1}{3}.$$

Oba jeden pierśw. jest 0, znak drug. przeciwny do $m \cdot \frac{b}{a}$.

$$\frac{c}{a} = 0.$$

$$m_1 = 0.$$

$$\frac{b}{a} > 0; m_2 < 0.$$

$$\frac{b}{a} < 0; m_2 > 0.$$

$$\frac{b}{a} = 1 - 3m \neq 0$$

$$\frac{c}{a} < 0, \text{ znaki są różne.}$$

$$\frac{c}{a} = m^2 < 0$$

$$m > 0, \text{ albo } m < 0$$

$$\text{gdy } m = \frac{1}{5} < m < 1 \text{ to } x_1 \text{ i } x_2 \text{ nie istn.}$$

$$\text{gdy } m = \frac{1}{5} \text{ to } x_1 = x_2 < 0.$$

$$\text{gdy } m = 1 \text{ to } x_1 = x_2 > 0.$$

$$\text{gdy } m < \frac{1}{5} \text{ to } x_1 \text{ i } x_2 < 0.$$

$$\text{gdy } m > \frac{1}{5} \text{ to } x_1 \text{ i } x_2 > 0.$$

Lekcja.

5.IV.38.

Dyskusja zagadnienia.

a.) m asf. - A

g.) - 2 m asf. (5 dni więcej i o 1 asf. więcej/dob.)

b.) x dni pracował pierwszy robotnik.

$$\frac{x}{x+5} = m \text{ asf.}$$

$$(x+5)x = 2m.$$

$$\frac{x}{x+5} = m.$$

$$(x+5)(y+1) = 2m.$$

$$y = \frac{m}{x}.$$

$$(x+5)(y+1) = 2m.$$

$$xy + 5y + x + 5 = 2m.$$

$$m + \frac{5m}{x} + x + 5 = 2m.$$

$$mx + 5m + x^2 + 5x = 2mx.$$

$$x^2 - mx + 5x + 5m = 0.$$

$$x^2 + x(5-m) + 5m = 0.$$

$$\Delta = 25 - 10m + m^2 - 20m$$

$$\Delta = m^2 - 30m + 25.$$

$$\Delta = m^2 - 30m + 25.$$

$$x = \frac{-5 + m \pm \sqrt{m^2 - 30m + 25}}{2}.$$

I. równ. nie ma pierś. — nie bierzemy.

II. $\Delta = 0$. równ. ma jeden pierś. gdy

$$m = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 100}}{2} \quad m = 15 + 10\sqrt{2}$$

$$m = \frac{30 \pm 20\sqrt{2}}{2} \quad \text{albo } m = 15 - 10\sqrt{2}.$$

$$m = 15 \pm 10\sqrt{2}.$$

dla $m = 15 + 10\sqrt{2}$.

$$\frac{b}{a} = 5 - m = 5 - 15 - 10\sqrt{2} = -10 - 10\sqrt{2}.$$

$$\frac{b}{a} = -10(1 + \sqrt{2}) < 0.$$

$$x_1 = x_2 > 0.$$

dla $m = 15 - 10\sqrt{2}$.

$$\frac{b}{a} = 5 - m = 5 - 15 + 10\sqrt{2} = -10 + 10\sqrt{2} =$$

$$\frac{b}{a} = 10(\sqrt{2} - 1) > 0.$$

$$x_1 = x_2 < 0. \quad \text{nie ma rozwiązania.}$$

III. $\Delta > 0$ równ. ma 2 pierś.

$$m < 15 - 10\sqrt{2} \quad \text{albo} \quad m > 15 + 10\sqrt{2}.$$

znaki jednak. gdy $\frac{c}{a} > 0$; $m > 0$.

$$5m > 0$$

$$m > 0.$$

$$0 < m < 15 - 10\sqrt{2} \quad \text{albo}$$

$$m > 15 + 10\sqrt{2}.$$

znaki dodat. gdy $\frac{c}{a} < 0$.

$$5 - m < 0$$

$$-m < -5$$

$$m > 5.$$

$$m > 15 + 10\sqrt{2}.$$

Równanie dwukwadrat.

6. IV. 38.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

$$z = x^2$$

$$z^2 - 5z + 4 = 0.$$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

$$z = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 4.$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1.$$

$$x_3 = 2, \quad x_4 = -2.$$

$$4(x^4 + 1) = 17x^2.$$

$$4x^4 - 17x^2 + 4 = 0.$$

$$z = x^2$$

$$4z^2 - 17z + 4 = 0.$$

$$z = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8}$$

$$z = \frac{17 \pm 15}{8}$$

$$z_1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad z_2 = \frac{32}{8} = 4.$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = -2.$$

$$(x+1)^2 : (\sqrt{3}+x) = (\sqrt{3}-x) : (x-1)^2.$$

$$(x+1)^2(x-1)^2 = (\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x).$$

$$(x^2+2x+1)(x^2-2x+1) = 3+x\sqrt{3}-x\sqrt{3}-x^2.$$

$$x^4+2x^3+x^2-2x^3-4x^2-2x+x^2+2x+1 = 3+x\sqrt{3}-x\sqrt{3}-x^2.$$

$$x^4-x^2-2=0.$$

$$z = x^2.$$

$$z^2-z-2=0.$$

itd.

Pyt. równ. dwukwadratowego.

$$x^4 - mx^2 + 16 = 0.$$

$$z = x^2.$$

$$z^2 - mz + 16 = 0.$$

$$\Delta = m^2 - 64.$$

I. Równ. ma nie ma pierwi. gdy $\Delta < 0$.

$$m^2 - 64 < 0.$$

$$m^2 < 64.$$

$$m < \pm 8.$$

$$m_1 < -8; m_2 < 8.$$

$$-8 < m < 8.$$

II. Równ. ma jeden pierwi. gdy $\Delta = 0$.

$$m = -8 \text{ albo } m = 8.$$

dla $m = -8$

$$\frac{b}{a} = -m = 8 > 0, \quad x_1 = x_2 < 0.$$

dla $m = 8$

$$\frac{b}{a} = -m = -8 < 0, \quad x_1 = x_2 > 0.$$

III. Równ. ma dwa pierwi. gdy $\Delta > 0$.

$$m < -8 \text{ albo } m > 8.$$

znaki jednak. $\frac{c}{a} > 0$.

$$16 > 0. \text{ zawsze jednak.}$$

dodat. $\frac{b}{a} < 0$.

$$(-8) \quad \frac{b}{a} = -m = 8 > 0, \text{ znaki nieujemne.}$$

$$(8) \quad \frac{b}{a} = -m = -8 < 0, \text{ dodat.}$$

$$\frac{c}{a} \neq 0$$

$$16 \neq 0 - \text{nie możliwe.}$$

$$\text{Znaki nieujemne } \frac{b}{a} > 0.$$

$$\frac{b}{a} = -m > 0$$

$$m < 0.$$

$m < -8$ albo $m > 8$ i < 0 - nie możliwe.

$$\text{Znaki dodatnie } \frac{b}{a} < 0.$$

$$\frac{b}{a} = -m < 0.$$

$$m > 0.$$

$$m > 8.$$

-(gdy $-8 < m < 8$ to x_1 i x_2 nie istn.)-

Gdy $-8 < m < 8$ to x_1 i x_2 nie istn.; x_1, x_2, x_3 i x_4 nie istn.

Gdy $m = -8$ to $x_1 = x_2 < 0$; x_3, x_4 nie istn.

Gdy $m = 8$ to $x_1 = x_2 > 0$; x_3, x_4 nie istn.

Gdy $m < -8$ to $x_1, x_2 < 0$; x_3, x_4 nie istn.

Gdy $m > 8$ to $x_1, x_2 > 0$; $x_3 < 0, x_4 > 0$.

1. Układ dwóch równań o dwóch niewiadomych z których jedno jest stop. pierwsz., a drugie stop. drugiego.

$$xy = 6$$

$$3x + 2y + 12 = 0.$$

$$x = \frac{6}{y}.$$

$$\frac{18}{y} + 2y + 12 = 0.$$

$$18 + 2y^2 + 12y = 0.$$

$$2y^2 + 12y + 18 = 0.$$

$$y = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{4}.$$

$$y = \frac{-12}{2} = -3.$$

$$y = -3.$$

$$x = \frac{6}{-3} = -2.$$

$$\frac{12}{2y}$$

$$\frac{144}{144}$$

$$\frac{18 \cdot 8}{144}$$

$$\frac{444}{144}$$

$$\sqrt{288}$$

$$2y = -12 - 3x.$$

$$y = \frac{-12 - 3x}{2}.$$

$$x \left(\frac{-12 - 3x}{2} \right) = 6.$$

$$\frac{-12x - 3x^2}{2} = 6.$$

$$-12x - 3x^2 = 12.$$

$$3x^2 + 12x + 12 = 0.$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0.$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}.$$

$$x = \frac{-4}{2} = -2.$$

$$y = \frac{-12 + 6}{2} = -3.$$

$$y^2 : x^2 = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} = 30$$

$$4x + 3y = 1$$

$$\frac{y^2 - yx}{x^2} = 30$$

$$y^2 - yx = 30x^2$$

$$4x + 3y = 1$$

propt. 11.

$$4x = 1 - 3y$$

$$x = \frac{1 - 3y}{4}$$

$$y^2 - y \left(\frac{1 - 3y}{4} \right) = 30 \left(\frac{1 - 3y}{4} \right)^2$$

$$y^2 - \frac{y + 3y^2}{4} = 30 \left(\frac{1 - 6y + 9y^2}{16} \right)$$

$$y^2 - \frac{y + 3y^2}{4} = \frac{30 - 180y + 270y^2}{16}$$

$$16y^2 - 4y + 12y^2 = 30 - 180y + 270y^2$$

$$-242y^2 + 176y - 30 = 0$$

$$121y^2 - 88y + 15 = 0$$

$$y = \frac{88 \pm \sqrt{7744 - 7260}}{242}$$

$$y = \frac{88 \pm 22}{242}$$

$$y_1 = \frac{66}{242} = \frac{33}{121} = \frac{3}{11}$$

$$y_2 = \frac{110}{242} = \frac{55}{121} = \frac{5}{11}$$

$$x_1 = \frac{1 - \frac{3}{11}}{4} = \frac{\frac{8}{11}}{4} = \frac{2}{11} = \frac{1}{5.5}$$

$$x_2 = \frac{1 - \frac{5}{11}}{4} = \frac{\frac{6}{11}}{4} = \frac{3}{22} = \frac{1}{7.33}$$

2.

Układ dwóch równań II. drug. o dwóch niewiadomych.

- Typ I. odnacza się tym, że przynajmniej w jednym równaniu przynajmniej jedna niewiadoma występuje tylko w stop. pierwszym. Z niewiadomą oblicza się z tego właśnie równania i podstawia się do równ. drugiego, po co otrzymuje się równ. o jednej niewiad. Typ II. odnacza się tym, że obie niewiad. w obu równ. wyst. tylko w st. II. i III. Układ taki rozwiązuje się wprowadzając za kwadraty niewiadomych nowe niewiadome. Typ III. odnacza się tym, że wszystkie wyrazy niewiadome są tylko stopnia drugiego. Układ taki rozwiązuje się wprowadzając podstawienia $y = tx$. Typ IV. obejmują układy, których nie można zaliczyć do żadnego z typów poprzednich. Rozwiązuje się je retrosknie.

Równanie niewymierne

jest to równanie, w którym niewiadoma wyst. pod pierw. - obie strony podnosimy do kwadratu (czasem nawet 2 razy). Równanie takie sprawdzamy po rozwiązaniu, bo potęgowanie nie jest działaniem jednoczesnym.

Postępy

Rzeczem liczbowym nazywamy zbiór liczb następujących po sobie według pewnego prawa.

Liczbę tworzącą ciąg nazywamy jego wyrazami; znaczymy je literą a z odpowiednim numerem porządkowym $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Prawo, według którego mają liczby po sobie następować, może być podane w trojaki sposób:

- np. 1.) napisai ciąg, którego pierwszy wyraz wynosiłby 10, a każdy następny był od poprzedniego o 2 mniejszy;
10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, ...
2.) Dzek napisanie kilku początk. wyrazów:
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \dots \dots \dots (a_n = \frac{n}{n+1})$$

3.) Przez napisanie wzoru na n -ty wyraz:

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \dots \dots \dots$$

$$a_n = \frac{n}{n+1}.$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \dots \dots \dots$$

$$a_n = \frac{n+1}{n^2}.$$

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25} \dots \dots \dots$$

Postęp arytmetyczny

jest to ciąg mający tę własność, że różnica jakiegokolwiek wyrazu i wyrazu następnego poprzedzającego go jest wielkością stałą, którą nazywamy różnicą postępu a -rytmetycznego i oznaczamy literą d .

$$a_n - a_{n-1} = d.$$

$$a_n = a_{n-1} + d.$$

Jakikolwiek wyraz mogę otrzymać z wyrazu poprzedzającego go plus różnica.

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Wzór na n -ty wyraz postępu arytmetycznego.

$$2, 4, 6, 8 \dots \dots \dots a_n = 2n.$$

Wzór na liczby parzyste.

$$1, 3, 5, 7 \dots \dots \dots a_n = 2n-1.$$

" " " " " nieparzyste.

$$2, 5, 8, 11 \dots \dots \dots a_n = 3n-1.$$

Pr. $\therefore \frac{a_n = a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ Suma n początk. wyrazów?

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d].$$

Postęp geometryczny

jest to ciąg mający tę własność, że iloraz jakiegokolwiek wyrazu i wyrazu poprzedzającego go jest wielkością stałą. Ten stały iloraz nazywa się ilorazem postępu geometrycznego i oznaczamy go przez q .

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}. \quad a_n = a_{n-1} \cdot q.$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow n\text{-ty wyraz post. geom.}$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \rightarrow \text{suma wyrazów post. geom.}$$

Pr. $\therefore \frac{a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}}{}$

Układanie równań.

8. IV. 38.

1. Suma cyfr liczby trzycyfr. wynosi 6.

" kwadr. tych cyfr " 14. Zmiana 99.

$$x + y + z = 6.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14.$$

$$100x + 10y + z = 100x + 10y + z + 99.$$

$$99x - 99x - 99 = 0.$$

$$z - x - 1 = 0.$$

$$z = x + 1.$$

$$x + y + x + 1 = 6.$$

$$2x + y = 5.$$

$$y = 5 - 2x.$$

$$x^2 + y^2 + x^2 + 2x + 1 = 14.$$

$$2x^2 + y^2 + 2x - 13 = 0.$$

$$2x^2 + y^2 = 5 - 2x.$$

$$y = 5 - 2x.$$

$$2x^2 + 25 - 20x + 4x^2 + 2x - 13 = 0.$$

$$6x^2 - 18x + 12 = 0.$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 3, \quad z_1 = 2.$$

$$x_2 = 2, \quad y_2 = 1, \quad z_2 = 3.$$

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 3, \quad z_1 = 2.$$

$$x_2 = 2, \quad y_2 = 1, \quad z_2 = 3.$$

132	213
231	312
99	

2. $l = 3000 \text{ m}$. 150 obrotów więcej / koło przednie)
100 " " " tylnego. (o 1 m dłuższe obrot)

x - obwód koła przedniego.

y - " " " tylnego.

$$\frac{3000}{x} + 150 = \frac{3000}{y}$$

$$\frac{3000}{x+1} = \frac{3000}{y+1} + 100$$

3. 28 km. - po 2 godz. $A \rightarrow B$ przybył o 40 min.
 x - prędkość pierwszego (z $A \rightarrow B$).

A _____ 2 godz. _____ B

28 km.

x - pr. $A \rightarrow B$

y - pr. $B \rightarrow A$

$$s = vt$$

$$t = \frac{s}{v}$$

$$2x + 2y = 28$$

$$\frac{28}{x} = \frac{28}{y} - \frac{2}{3}$$

